

整数問題

99題

【演習1】

次の式を満たす正の整数 x, y の値を求めよ。

$$x^3y - xy^3 - x^2y + xy^2 - x^3 + y^3 = 15$$

【1977 芝浦工業大学】

$$x^3y - xy^3 - x^2y + xy^2 - x^3 + y^3 = 15$$

$$\Leftrightarrow xy(x-y)(x+y) - xy(x-y) - (x-y)(x^2 + xy + y^2) = 15$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x^2y + xy^2 - x^2 - 2xy - y^2) = 15$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x+y)(xy - x - y) = 3 \cdot 5$$

x, y は正の整数だから、

$$x + y = 3, 5, 15$$

(i) $x + y = 3$ のとき、

$$(x-y)(xy-3) = 5$$

$$\Leftrightarrow (x-y, xy-3) = (1, 5), (5, 1), (-1, -5), (-5, -1)$$

$$\Leftrightarrow (x-y, xy) = (1, 8), (5, 4), (-1, -2), (-5, 2)$$

適するものなし。

(ii) $x + y = 5$ のとき、

$$(x-y)(xy-5) = 3$$

$$\Leftrightarrow (x-y, xy-5) = (1, 3), (3, 1), (-1, -3), (-3, -1)$$

$$\Leftrightarrow (x-y, xy) = (1, 8), (3, 6), (-1, 2), (-3, 4)$$

これより、 $x = 1, y = 4$

(iii) $x + y = 15$ のとき、

$$(x-y)(xy-15) = 1$$

$$\Leftrightarrow (x-y, xy-15) = (1, 1), (-1, -1)$$

$$\Leftrightarrow (x-y, xy) = (1, 16), (-1, 15)$$

適するものなし。

【演習 2】

$$\sqrt{a^2 + b^2 + 2^2} = a + b + 2$$

を満たす整数 a, b を求めよ。

【1977 福岡教育大学】

$$\sqrt{a^2 + b^2 + 2^2} = a + b + 2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2^2 = (a + b + 2)^2, a + b + 2 \geq 2$$

$$\Leftrightarrow 2ab + 4a + 4b = 0, a + b \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a + 2)(b + 2) = 4, a + b + 4 \geq 4$$

$$\{a + 2, b + 2\} = \{1, 4\}, \{2, 2\}$$

$$\therefore \{a, b\} = \{-1, 2\}, \{0, 0\}$$

【演習 3】

m を整数とする。方程式 $6x + my = 15$ の x と y がともに整数となる解のうち、 y が正の最小になっているものを求めよ。

【1977 立命館大学】

$$6x + my = 15$$

$$my = 12 - 6x + 3$$

$$my = 6M + 3$$

と書けるから、 m は奇数であるから、 m を 6 で割った余りで分類すると、

(i) $m = 6a + 1$ のときは、 $y = 6b + 3$ だから、 $y = 3$ である。したがって、 $x = \frac{5 - m}{2}$

(ii) $m = 6a + 3$ のときは、 $y = 6b + 1$ だから、 $y = 1$ である。したがって、 $x = \frac{15 - m}{6}$

(iii) $m = 6a + 5$ のときは、 $y = 6b + 3$ だから、 $y = 3$ である。したがって、 $x = \frac{5 - m}{2}$

【演習 4】

相異なる n 個の自然数の和と積が等しいとき、 n の値とそれら n 個の自然数の組をすべて求めよ。ただし、 $n \geq 2$ とする。

【1977 岐阜大学】

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n$$

$$1 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_n$$

のとき、

$$nx_n \geq x_1 + x_2 + \cdots + x_n = x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n \geq (n-1)! \times x_n$$

より、

$$n \geq (n-1)!$$

$$2 \geq 1 (: n=2), 3 \geq 2 (: n=3), 4 \geq 6 (: n=4)$$

である。 $n \geq 4$ で、 $n < (n-1)!$ と仮定すると、

$$n! > n^2 > n+1$$

となるから、 $n \geq 4$ では、つねに $n \geq (n-1)!$ が成り立つ。よって、 $n=2, 3$ である。

$n=2$ のとき、

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= x_1 \times x_2 \\ \Leftrightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) &= 1 \\ \Leftrightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1 &= 1 \end{aligned}$$

これは不適。

$n=3$ のとき、

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= x_1 \times x_2 \times x_3 \\ 1 &= \frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_2 x_3} + \frac{1}{x_3 x_1} \leq \frac{3}{x_1^2} \\ x_1^2 &\leq 3 \\ \therefore x_1 &= 1 \\ 1 + x_2 + x_3 &= x_2 \times x_3 \\ \Leftrightarrow (x_2 - 1)(x_3 - 1) &= 2 \\ \Leftrightarrow x_2 - 1 = 2, x_3 - 1 &= 2 \\ \therefore x_2 = 2, x_3 &= 3 \end{aligned}$$

【演習 5】

p, q がともに奇数のとき、方程式 $x^2 + px + q = 0$ は整数の解をもたないことを証明せよ。

【1977 立教大学】

$$x^2 + px + q = 0$$

が $x = 2m$ を解にもつとすると、

$$4m^2 + 2pm + q = 0$$

両辺の偶奇が一致せず。 $x = 2m + 1$ を解にもつとすると、

$$4m^2 + 4m + 1 + 2pm + p + q = 0$$

両辺の偶奇が一致せず。よって、整数解をもつことはない。

【演習 6】

3桁の素数 p の 100 の位の数 a , 10 の位の数 b , 1 の位の数 c とする。このとき、2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ は整数解をもたないことを証明せよ。【1977 名古屋大学】

$p = 10^2a + 10b + c \cdots \cdots \textcircled{1}$ のとき、

$$ax^2 + bx + c = 0$$

が整数解 $x = n$ を解にもつとすると、

$$an^2 + bn + c = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①-②より、

$$\begin{aligned} p &= a(10 - n)(10 + n) + b(10 - n) \\ &= (10 - n)\{a(10 + n) + b\} \end{aligned}$$

②より $n < 0$ であることに注意すると、 $10 - n \geq 11$ であるから、

$$10 - n = p, a(10 + n) + b = 1$$

n を消去して、

$$a(20 - p) + b = 1$$

$0 \leq b \leq 9$ より、

$$\begin{aligned} 0 &\leq 1 - a(20 - p) \leq 9 \\ -1 &\leq a(p - 20) \leq 8 \cdots \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

p は 3 桁だから、

$$80a \leq a(p - 20) \leq 979a \cdots \cdots \textcircled{4}$$

③と④は両立しない。よって、整数解をもたない。

【演習 7】

x に関する方程式 $4x^3 - (a - 2)x - (a + 4) = 0$ (a は整数) が、整数でない正の有理数を解にもつとき、その解を求めよ。【1977 同志社大学】

$$4x^3 - (a - 2)x - (a + 4) = 0$$

が

$$x = \frac{q}{p} \quad (p, q \in \mathbb{N}, p, q \text{ は互いに素})$$

を解にもつとき、

$$4\left(\frac{q}{p}\right)^3 - (a-2)\frac{q}{p} - (a+4) = 0$$

$$4q^3 - (a-2)p^2q - (a+4)p^3 = 0$$

$$4q^3 = p^2\{(a-2)q + (a+4)p\}$$

$4q^3$ は p^2 を約数にもつが p, q は互いに素だから、 p^2 は 4 の約数となり、 $p = 2$ である。

このとき、

$$q^3 = (a-2)q + 2(a+4)$$

$$= a(q+2) - 2q + 8$$

$$a = \frac{q^3 + 2q - 8}{q+2} = p^2 - 2p + 6 - \frac{20}{q+2}$$

と変形すれば、

$$q+2 = 4, 5, 10, 20$$

$$\therefore q = 2, 3, 8, 18$$

この中で適するものは、 $q = 3$ だから、 $x = \frac{3}{2}$

【演習 8】

平面で x 座標、 y 座標がともに整数である点を格子点ということにする。

- (1) どの格子点も点 $\left(\sqrt{2}, \frac{1}{3}\right)$ からの距離が異なることを証明せよ。
- (2) 格子点のうちで点 $\left(\sqrt{2}, \frac{1}{3}\right)$ に 1 番近い点 A, 2 番目に近い点 B, 3 番目に近い点 C の座標を求めよ。
- (3) n を任意の整数とすると、うまく円をかけば、ちょうど n 個の格子点を内部に含むようにできる。この理由を述べよ。

【1977 香川大学】

(1)

異なる2つの格子点 $(a, b), (c, d)$ の垂直二等分線は、

$$\begin{aligned}(x-a)^2 + (y-b)^2 &= (x-c)^2 + (y-d)^2 \\ \Leftrightarrow 2(c-a)x + 2(d-b)y &= c^2 + d^2 - a^2 - b^2\end{aligned}$$

この上に点 $\left(\sqrt{2}, \frac{1}{3}\right)$ がのついているとすると、

$$2(c-a)\sqrt{2} + 2(d-b)\frac{1}{3} = c^2 + d^2 - a^2 - b^2$$

$c = a$ とすると、

$$2(d-b)\frac{1}{3} = d^2 - b^2$$

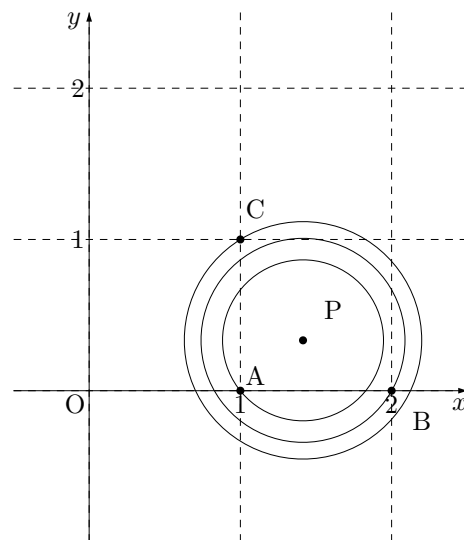
$d \neq b$ だから、 $d+b = \frac{2}{3}$ となり、これは矛盾。

$c \neq a$ とすると、

$$\sqrt{2} = \frac{c^2 + d^2 - a^2 - b^2 - \frac{2}{3}(d-b)}{2(c-a)}$$

この右辺は有理数だから、これも矛盾。

よって、異なる2つの格子点 $(a, b), (c, d)$ からの $\left(\sqrt{2}, \frac{1}{3}\right)$ までの距離は異なる。



(2) 右上の図より、 $A(1,0), B(2,0), C(1,1)$ である。

(3) 点 P からの各格子点までの距離は異なるから、距離の小さい順に格子点を A_1, A_2, A_3, \dots と名前をつけ、 $PA_k = r_k (k = 1, 2, 3, \dots)$ とする。異なる2数 r_n, r_{n+1} にたいして $r_n < r < r_{n+1}$ なる r が存在するから、 P を中心に半径 r の円を描けば、その中にちょうど n 個の格子点が含まれる。

【演習9】

1 より大きいどのような整数 n についても次の (i), (ii) のいずれかが成り立つことを示せ。

(i) n は素数である。

(ii) $1 < p \leq \sqrt{n}$ なる素数 p があって、 n は p で割り切れる。

【1977 立教大学】

示すべきは、

「 n は素数でない」ならば、「 $1 < p \leq \sqrt{n}$ なる素数 p があって、 n は p で割り切れる。」である。

n が素数でないならば、

$$n = p^2 Q_1 \text{ (} p \text{ は素数, } Q_1 \text{ は自然数)} \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$n = pqQ_2 \text{ (} p, q \text{ は異なる素数, } Q_2 \text{ は自然数)} \cdots \cdots \textcircled{2}$$

のいずれかと表せる。

①のとき確かに (ii) は成立する。

②のとき、 $p < q$ とすれば、 $p^2 < pqQ_2$ だから、やはり (ii) は成立する。

【演習 10】

整数 m, n が互いに素ならば、 $2m + 3n$ と $m + 2n$ も互いに素であることを証明せよ。

【1977 岐阜歯科大学】

$2m + 3n, m + 2n$ が公約数 $p (\geq 2)$ をもつとすると、

$$\begin{cases} 2m + 3n = pk \\ m + 2n = pj \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = p(2k - 3j) \\ n = p(2j - k) \end{cases}$$

よって、 m, n も公約数 p をもち、矛盾する。よって、示せた。

【演習 11】

6桁の整数 $1x100y$ が 38 で割り切れるように数字 x, y を定めよ。

【1977 関西大学】

$$1x100y_{(10)} = 10^5 + x \cdot 10^4 + 10^3 + y$$

$$\equiv 22 + 6x + 12 + y \pmod{38}$$

$$\equiv 6x + y - 4 \pmod{38}$$

であって、

$$3 \leq 6x + y - 4 \leq 59$$

だから、

$$6x + y - 4 = 38$$

$$6x + y = 42$$

y は 6 の倍数になるから、

$$y = 6, x = 6$$

【演習 12】

n を自然数として、 $n^2 + n$ を 10 進法で表したときの末位の数字を $T(n)$ とする。 p, q, t が自然数のとき、

- (1) $T(3), T(4), T(5), T(6)$ を求めよ。
- (2) $p + q = 9$ ならば、 $T(p) = T(q)$ であることを示せ。
- (3) 任意の n に対して、 $T(n + t) = T(n)$ となる t はどんな数か。

【1977 近畿大学】

	n	3	4	5	6
(1)	$n(n+1)$	12	20	30	42
	$T(n)$	3	0	0	2

(2)

$$\begin{aligned} p^2 + p - (q^2 + q) &= (p - q)(p + q + 1) \\ &= 10(p - q) \end{aligned}$$

であるから、

$$T(p) = T(q)$$

(3)

$$\begin{aligned} T(n + t) &= T(n) \\ \Leftrightarrow (n + t)^2 + n + t - (n^2 + n) &= 10M \\ \Leftrightarrow 2nt + t^2 + t &= 10M \end{aligned}$$

これが任意の自然数 n で成り立つから、

$$t^2 + 3t = 10M_1 \quad (n = 1)$$

$$t^2 + 5t = 10M_2 \quad (n = 2)$$

$$\therefore 2t = 10M_3$$

$$\therefore t = 5M_3$$

よって、 t は 5 の倍数である。

【演習 13】

次の (1),(2) を証明せよ。

- (1) 任意に与えられた相異なる 4 つの整数 x_0, x_1, x_2, x_3 を考える。これらのうちから適当に 2 つの整数を選んで、その差が 3 の倍数となるようにできる。
- (2) n を 1 つの正の整数とする。このとき、 n の倍数であり、桁数が $(n+1)$ を超えず、かつ $33\cdots 300\cdots 0$ の形で表される整数がある。

【1977 神戸大学】

- (1) 相異なる 4 つの整数 x_0, x_1, x_2, x_3 のそれぞれを 3 で割った余りは、0, 1, 2 のいずれかであるから、 x_0, x_1, x_2, x_3 のうち少なくとも 2 つは同じ余りである。その 2 数の差をとれば、その値は 3 の倍数になる。

(2)

$$3, 33, 333, \dots, \underbrace{333\cdots 3}_{n+1 \text{ 個}}$$

の $n+1$ 個の自然数の中の少なくとも 2 つは n で割った余りが等しいから、その 2 数の差： $33\cdots 300\cdots 0$ は n の倍数になって、これは $n+1$ 桁を超えないものである。

【演習 14】

次のことを証明せよ。

- (1) p が正の整数のとき、 $p^3 + (p+1)^3 + (p+2)^3$ は 9 の倍数である。
- (2) $p > 3$ で、 p と $p+2$ がともに素数のとき、 $p+1$ は 6 の倍数である。

【1977 広島大学】

(1)

$$\begin{aligned} P &= p^3 + (p+1)^3 + (p+2)^3 \\ &= 3p^3 + 9p^2 + 15p + 9 \\ &= 3p^3 - 3p + 9(p^2 - 2p + 1) \\ &= 3(p-1)p(p+1) + 9(p^2 - 2p + 1) \end{aligned}$$

ここで、 $(p-1)p(p+1)$ は連続 3 整数の積で 3 の倍数だから、 P は 9 の倍数である。

- (2) $p(p+1)(p+2)$ は連続 3 整数の積で 3 の倍数であるから、6 の倍数である。 p は $p > 3$ なる素数だから、2 でも 3 でもない素数であるから、 $p+1$ が 6 の倍数である。

【演習 15】

すべての自然数は 4 個の平方数の和として表される。例えば、

$$6 = 0^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2$$

$$7 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2$$

$$30 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 5^2$$

である。次の問に答えよ。

(1) 21, 43 を 4 個の平方数の和として表せ。(1 通りでよい)

(2) $l^2 + m^2 + n^2 = 23 (0 \leq l \leq m \leq n)$ となる整数 l, m, n は存在しないことを示せ。

【1977 琉球大学】

(1)

$$21 = 4^2 + 2^2 + 1^2 + 0^2$$

$$43 = 5^2 + 4^2 + 1^2 + 1^2$$

(2)

$$l^2 + m^2 + n^2 = 23$$

$$(0 \leq l < m \leq n)$$

なる整数 l, m, n が存在したとする。

$$23 = l^2 + m^2 + n^2 \geq 3l^2$$

より、 $l = 0, 1, 2$

$l = 0$ のとき、 $m^2 + n^2 = 23$ だから、

$$m = 1^2 \Rightarrow n^2 = 22 \text{ (不適)}$$

$$m = 2^2 \Rightarrow n^2 = 19 \text{ (不適)}$$

$$m = 3^2 \Rightarrow n^2 = 14 \text{ (不適)}$$

$$m = 4^2 \Rightarrow n^2 = 7 \text{ (不適)}$$

$l = 1$ のとき、 $m^2 + n^2 = 22$ だから、

$$m = 1^2 \Rightarrow n^2 = 21 \text{ (不適)}$$

$$m = 2^2 \Rightarrow n^2 = 18 \text{ (不適)}$$

$$m = 3^2 \Rightarrow n^2 = 13 \text{ (不適)}$$

$$m = 4^2 \Rightarrow n^2 = 6 \text{ (不適)}$$

$l = 2$ のとき、 $m^2 + n^2 = 19$ だから、

$$m = 1^2 \Rightarrow n^2 = 18 \text{ (不適)}$$

$$m = 2^2 \Rightarrow n^2 = 15 \text{ (不適)}$$

$$m = 3^2 \Rightarrow n^2 = 10 \text{ (不適)}$$

以上より、 $l^2 + m^2 + n^2 = 23 (0 \leq l \leq m \leq n)$ となる整数 l, m, n は存在しない。

【演習 16】

n, a, b, c, d は 0 または正の整数であって、

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = n^2 - 6$$

$$a + b + c + d = n$$

$$a \geq b \geq c \geq d$$

を満たすものとする。このような数の組 (n, a, b, c, d) をすべて求めよ。

【1980 東京大学】

$$(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$$

より、

$$n^2 = n^2 - 6 + 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$$

$$ab + ac + ad + bc + bd + cd = 3$$

$$3 \geq 6d^2$$

$$\therefore d = 0$$

このとき、

$$ab + ac + bc = 3$$

$$3 \geq c^2$$

$$\therefore c = 0, 1$$

$c = 0$ のとき、

$$ab = 3$$

$$(a, b) = (3, 1)$$

$c = 1$ のとき、

$$ab = 2$$

$$(a, b) = (2, 1)$$

$$\therefore (n, a, b, c, d) = (4, 2, 1, 1, 0), (4, 3, 1, 0, 0)$$

【演習 17】

n を正の整数とし、 p を正の素数とする。3 次方程式

$$x^3 + nx^2 - (5 - n)x + p = 0$$

の 1 つの解が正の整数であるとき、この方程式を解け。

【1980 滋賀大学】

$$x^3 + nx^2 - (5 - n)x + p = 0$$

の正の整数解を m とおくと、

$$\begin{aligned} m^3 + nm^2 - (5 - n)m + p &= 0 \\ \Leftrightarrow m \{-m^2 - nm + (5 - n)\} &= p \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} m = p, -m^2 - nm + (5 - n) &= 1 \cdots \cdots \textcircled{1} \text{ または} \\ m = 1, -m^2 - nm + (5 - n) &= p \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

①のとき、

$$\begin{aligned} -p^2 - np + (5 - n) &= 1 \\ \Leftrightarrow p^2 + np + n &= 4 \end{aligned}$$

$$p^2 + np + n \geq 2^2 + 2 + 1$$

だから、これは不適。

②のとき、

$$\begin{aligned} -1 - n + (5 - n) &= p \\ \Leftrightarrow p &= 4 - 2n \end{aligned}$$

だから、適するものは、 $p = 2, n = 1$

求める解は、

$$\begin{aligned} x^3 + nx^2 - (5 - n)x + p &= 0 \\ \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 4x + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + 2x - 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 1, x = -1 \pm \sqrt{3} \end{aligned}$$

【演習 18】

0,1 のいずれとも異なる 2 整数 $a, b (a \neq b)$ を考え、

$$f(x) = x(x-1)(x-a)(x-b) + 1$$

とおく。 $g(x), h(x)$ が整数係数の多項式で、 $f(x) = g(x)h(x)$ であると仮定する。このとき、

- (1) $g(0) = h(0)$ を示せ。
- (2) $g(x), h(x)$ のどちらも定数でないならば、 $g(x) = h(x)$ であることを示せ。
- (3) (2) の場合が起こるような a, b の例を 1 組求めよ。

【1980 京都大学】

$$\begin{aligned} f(x) &= x(x-1)(x-a)(x-b) + 1 \\ &= g(x)h(x) \end{aligned}$$

で、 $g(x), h(x)$ が整数係数の多項式だから、任意の整数 n に対して、 $f(n), g(n)$ は整数である。

(1)

$$f(0) = 1 = g(0)h(0)$$

より、

$$g(0) = h(0) = 1 \text{ または } g(0) = h(0) = -1$$

- (2) $g(x), h(x)$ のどちらも定数でないならば、 $g(x), h(x)$ は 1 次以上の多項式であり、たかだか 3 次の多項式である。

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 = g(1)h(1) \\ f(a) &= 1 = g(a)h(a) \\ f(b) &= 1 = g(b)h(b) \end{aligned}$$

であるから、(1) と同様に、

$$g(1) = h(1), g(a) = h(a), g(b) = h(b)$$

異なる 4 つの値で式の値が一致するから、恒等的に、

$$g(x) = h(x)$$

が成り立つ。

(3)

$g(x), h(x)$ は2次式となるから、定数項に着目して、

$$x(x-1)(x-a)(x-b)+1=(x^2-cx+1)^2$$

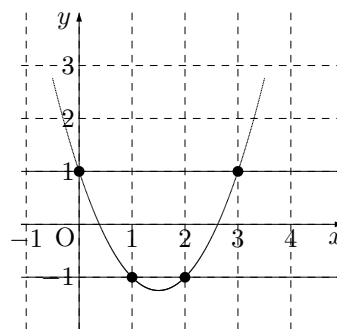
または、

$$x(x-1)(x-a)(x-b)+1=(x^2-cx-1)^2$$

とおける。

$g(x)=x^2-cx+1$ として、 $y=g(x)$ と $y=1, y=-1$

との交点の x 座標が $0, b, 1, a$ の場合を考えると、 $a=2, b=3$ となる。



【演習 19】

整数 a, b を係数とする2次式 $f(x) = x^2 + ax + b$ を考える。 $f(\alpha) = 0$ となるような有理数 α が存在するとき、以下のことを証明せよ。

(1) α は整数である。

(2) 任意の整数 l と任意の自然数 n に対して、 n 個の整数 $f(l), f(l+1), \dots, f(l+n-1)$ のうち少なくとも1つは n で割り切れる。

【1980 大阪大学】

(1) $\alpha = \frac{p}{q}$ ($p, q \in \mathbb{Z}$, は互いに素) とおくと、

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 + a\left(\frac{p}{q}\right) + b = 0$$

$$\Leftrightarrow p^2 + apq + bq^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow p^2 = -q(ap + bq)$$

q は p^2 の約数だが、 p, q は互いに素だから、 $q = 1$ である。

よって、 α は整数である。

(2) $l + k - \alpha$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) を n で割った余りを r ($r = 0, 1, 2, \dots, n-1$) とおくと、 $l + k = \alpha + nq + r$ と書けるから、

$$f(l+k) = f(\alpha + nq + r)$$

$$= (\alpha + nq + r)^2 + a(\alpha + nq + r) + b$$

$$\equiv (\alpha + r)^2 + a(\alpha + r) + b \pmod{n}$$

$$= f(\alpha) + 2\alpha r + r^2 + ar$$

$$= r(2\alpha + \alpha + r)$$

$r = 0$ とおけば、ある k で $f(l+k)$ は n の倍数になる。

【演習 20】

n, p を任意の自然数とするとき、 n^p と n^{p+4} の 1 位の数字は一致することを証明せよ。

【1981 甲南大学】

$$\begin{aligned} n^{p+4} - n^p &= n^p (n^4 - 1) \\ &= n^p \{ (n-2)(n-1)(n+1)(n+1) + 5n^2 - 5 \} \\ &= n^{p-1} \left\{ \underbrace{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+1)}_{(A)} + 5 \underbrace{(n-1)n(n+1)}_{(B)} \right\} \end{aligned}$$

(A) は連続 5 整数の積ゆえ $5! = 120$ の倍数であり、(B) は連続 3 整数の積ゆえ $3! = 6$ の倍数だから、 $n^{p+4} - n^p$ は 10 の倍数であるから、 n^p と n^{p+4} の 1 位の数字は一致する。



フェルマーの小定理である。

【演習 21】

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ は有理数を係数とする多項式であって、任意の整数 n に対し、 $f(n)$ は常に整数となるとき。このとき、 $f(x)$ の係数の 6 倍は整数であることを証明せよ。

【1981 学習院大学】

$$f(n) = an^3 + bn^2 + cn + d$$

が任意の整数 n に対し常に整数となるとき、

$$f(n+1) - f(n) = a(3n^2 + 3n + 1) + b(2n+1) + c \dots\dots\dots ①$$

$$\{f(n+2) - f(n+1)\} - \{f(n+1) - f(n)\}$$

$$= f(n+2) - 2f(n+1) + f(n)$$

$$= a(6n+6) + 2b \dots\dots\dots ②$$

$$\{f(n+3) - 2f(n+2) + f(n+1)\} - \{f(n+2) - 2f(n+1) + f(n)\}$$

$$= f(n+3) - 3f(n+2) + 3f(n+1) - f(n)$$

$$= 6a \dots\dots\dots ③$$

であるが、③より、 $6a$ は整数。したがって、②より、 $2b$ は整数。また、①において、

$$\begin{aligned} &a(3n^2 + 3n + 1) + b(2n+1) + c \\ &= 3a \times \underbrace{n(n+1)}_{\text{連続 2 整数の積}} + 2b \times n + a + b + c \end{aligned}$$

が任意の n で整数だから、 $a + b + c$ も整数で、 $6a + 6b + 6c$ も整数となるから、 $6c$ も整数である。
最後に、 $f(0) = d$ だから、 $6d$ も整数となる。

【演習 22】

$m^2 = 2^n + 1$ を満足する正の整数 m, n の組をすべて求めよ。

【1982 学習院大学】

$$m^2 = 2^n + 1$$

のとき、 m は奇数だから、 $m = 2M + 1$ とおける。

$$(2M + 1)^2 = 2^n + 1$$

$$\Leftrightarrow 4M^2 + 4M = 2^n$$

$$\Leftrightarrow M(M + 1) = 2^{n-2}$$

ここで、 $M, M + 1$ の一方は偶数で、他方は奇数で 1 である。

$M = 1$ のとき、 $M + 1 = 2$ で $n = 3$ となる。

$$M + 1 = 1 \Leftrightarrow M = 0$$

のときは適さず。よって、 $m = 3, n = 3$ である。

【演習 23】

$n + 7$ は 5 の倍数で、 $n + 5$ は 7 の倍数である自然数 n のうちで最小なものを求めよ。

【1982 芝浦工業大学】

$$n + 7 = 5k$$

$$n + 5 = 7j$$

とおくと、

$$5k - 7j = 7 - 5$$

$$5(k + 1) = 7(j + 1)$$

5 と 7 は互いに素だから、

$$k + 1 = 7m, j + 1 = 5m$$

$$\therefore n = 5(7m - 1) - 7$$

求める n は 23 である。

【演習 24】

a, b は正の整数で $a + 2$ が b で割り切れ、 $b + 1$ が a で割り切れる。このような a, b の組をすべて求めよ。

【1982 津田塾大学】

$$a + 2 = bm \dots\dots\dots ①$$

$$b + 1 = an \dots\dots\dots ②$$

とおける。①-②より、

$$a - 2b = bm - 2an$$

$$a(2n + 1) = b(m + 2)$$

②より、 a, b は互いに素であるから、

$$a = m + 2, b = 2n + 1$$

$$(m + 2) + 2 = (2n + 1)m$$

$$2mn = 2 + 2$$

$$mn = 2$$

$$(m, n) = (2, 1), (1, 2)$$

$$\therefore (a, b) = (4, 3), (3, 5)$$

【演習 25】

x, y を正の整数として、 $a = 5x + 4y, b = 6x + 5y$ とおくとき、次の (1), (2) を証明せよ。

(1) a, b の最大公約数と x, y の最大公約数は相等しい。

(2) $\frac{4}{5} < r < \frac{5}{6}$ を満たすどんな有理数 r も x, y を適当に選べば、 $r = \frac{a}{b}$ と表される。

【1982 岐阜大学】

(1)

$$\begin{cases} a = 5x + 4y \\ b = 6x + 5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5a - 4b \\ y = -6a + 5b \end{cases}$$

x, y の最大公約数を G, a, b の最大公約数を K とすると、

$$x = Gx', y = Gy' \ (x', y' \text{ は互いに素})$$

かけて、

$$\begin{cases} a = G(5x' + 4y') \\ b = G(6x' + 5y') \end{cases}$$

となるから、 G は a, b の公約数である。よって、 $G \leq K \dots\dots\dots ①$

次に a, b の最大公約数を K だから、

$$a = Ka', b = Kb'$$

と書けて、

$$\begin{cases} x = K(5a' - 4b') \\ y = K(-6a' + 5b') \end{cases}$$

となるから、 K は x, y の公約数である。よって、 $K \leq G \cdots \cdots ②$

①, ②より、 $G = K$ となる。

(2)

$$\frac{4}{5} < r < \frac{5}{6}$$

を満たす有理数 r を $r = \frac{a}{b}$ とおくと、

$$\frac{4}{5} < \frac{a}{b} < \frac{5}{6} \Leftrightarrow 5a - 4b > 0, -6a + 5b > 0$$

だから、

$$\begin{cases} x = 5a - 4b \\ y = -6a + 5b \end{cases}$$

となる正の整数 x, y が存在する。この x, y に対して、 a, b は、

$$\begin{cases} a = 5x + 4y \\ b = 6x + 5y \end{cases}$$

と表せる。

【演習 26】

5 個の正の整数があつて、それらの和と積は等しいとする。

- (1) 5 個のうちから 4 個選んで作った積の中には 5 を超えないものがあることを示せ。
- (2) 5 個の数の積を求めよ。

【1982 名城大学】

- (1) 5 個の正の整数を $a, b, c, d, e (a \leq b \leq c \leq d \leq e)$ とおくと、

$$abcde = a + b + c + d + e$$

$$0 < a \leq b \leq c \leq d \leq e$$

$abcd > 5$ と仮定すると、

$$abcde > 5e$$

$$a + b + c + d + e > 5e$$

$$\therefore (e - a) + (e - b) + (e - c) + (e - d) < 0$$

これは矛盾。よって、

$$abcd \leq 5$$

である。

(2)

$$a^4 \leq abcd \leq 5$$

$$\therefore a = 1$$

$$b^3 \leq bcd \leq 5$$

$$\therefore b = 1$$

$$c^2 \leq cd \leq 5$$

$$\therefore c = 1, c = 2$$

$c = 1$ のとき、

$$de = 3 + d + e$$

$$(d - 1)(e - 1) = 4$$

$$(d - 1, e - 1) = (1, 4), (2, 2)$$

$$\Leftrightarrow (d, e) = (2, 5), (3, 3)$$

$c = 2$ のとき、

$$2de = 4 + d + e$$

$$(2d - 1)(2e - 1) = 9$$

$$(2d - 1, 2e - 1) = (3, 3)$$

$$\Leftrightarrow (d, e) = (2, 2)$$

以上より、

$$(a, b, c, d, e) = (1, 1, 1, 2, 5), (1, 1, 1, 3, 3), (1, 1, 2, 2, 2)$$

【演習 27】

n は整数とする。方程式 $x^2 - y^2 = n$ が整数解 x, y をもつためには、 n が奇数または、4 の倍数であることが必要十分であることを証明せよ。

【1983 大阪市大学】

$$x^2 - y^2 = n \Leftrightarrow (x - y)(x + y) = n$$

を満たす整数解があるとき、

$$x - y + x + y = 2x$$

だから、 $x - y, x + y$ の値の偶奇は一致する。

$x - y, x + y$ の値がともに偶数のときは、 n は 4 の倍数になり、 $x - y, x + y$ の値がともに奇数のときは、 n は奇数になる。

逆に n が 4 の倍数のとき、 $n = 4m$ とおくと、

$$x + y = 2m, x - y = 2$$

$$\Leftrightarrow x = m + 1, y = m - 1$$

なる解が存在する。また、 n が奇数のとき、 $n = 2m + 1$ とおくと、

$$x + y = 2m + 1, x - y = 1$$

$$\Leftrightarrow x = m + 1, y = m$$

なる解が存在する。

【演習 28】

正の実数 x の小数部分 (x から x を超えない最大の整数を引いたもの) を $\{x\}$ で表すとき、

(1) m が正の整数のとき、

$$\left\{\frac{1}{m}\right\}, \left\{\frac{2}{m}\right\}, \left\{\frac{3}{m}\right\}, \dots, \left\{\frac{n}{m}\right\}, \dots$$

の中には相異なる数は有限個しかない。

(2) a が無理数のとき、

$$\{a\}, \{2a\}, \{3a\}, \dots, \{na\}, \dots$$

はすべて相異なる。

【1983 茨城大学】

(1) 任意の自然数 n に対して、

$$\begin{cases} n = mQ + r \\ r = 0, 1, 2, \dots, m - 1 \end{cases}$$

なる Q, r が存在する。

$$\left\{\frac{n}{m}\right\} = \left\{\frac{mQ + r}{m}\right\} = \left\{\frac{r}{m}\right\}$$

の値は m 個で、有限個である。

(2) a が無理数のとき、ある異なる自然数 i, j に対して、

$$\{ia\} = \{ja\}$$

とすると、

$$ia - ja = m \ (m \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{m}{i-j}$$

となるが、この左辺は有理数で、矛盾。よって、

$$\{a\}, \{2a\}, \{3a\}, \dots, \{na\}, \dots$$

はすべて相異なる。

【演習 29】

a, b, c を自然数とし、 $p = a^2 + b^2 + c^2$ とおく。このとき、次の (1), (2) を証明せよ。

- (1) a, b, c すべてが 3 の倍数でないならば、 p は 3 の倍数である。
(2) a, b, c, p がすべて素数ならば、 a, b, c のうち少なくとも 1 つは 3 である。

【1983 甲南大学】

(1)

$$(3m \pm 1)^2 = 3M + 1$$

と表わせるから、 a, b, c を自然数とし、 $p = a^2 + b^2 + c^2$ とおくと、 a, b, c すべてが 3 の倍数でないならば、

$$p = 3A + 1 + 3B + 1 + 3C + 1 = 3(A + B + C + 1)$$

と書けて p は 3 の倍数である。

- (2) a, b, c のすべてが 3 の倍数でないならば、 p が 3 の倍数であるから、 $p = 3$ となる。このとき、 $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ だから、 $a = b = c = 1$ となって矛盾。よって、 a, b, c の 1 つは 3 の倍数、すなわち 3 である。

【演習 30】

n を正の整数とし、 $f(n)$ を n の一位の数字とする。

- (1) $f(n) \{f(n^2) + f(n)\} = 12$ を満たす $f(n)$ の値を求めよ。
(2) 任意の正の整数に対して、 $f(n^2 + n)$ は偶数であることを証明せよ。
(3) 任意の正の整数 n, k に対して、 $f(n^k) = f(n^{k+4})$ であることを証明せよ。

【1983 防衛医科大学】

(1)

$$f(n) = r \Leftrightarrow n = 10q + r \ (0 \leq r \leq 9)$$

とおく。

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
$f(n^2) + f(n)$	0	2	6	12	10	10	12	16	12	10
$f(n) \{f(n^2) + f(n)\}$	0	2	12	36	40	50	72	112	96	90

この表より、 $f(n) = 2$ である。



$f(n)$ は 12 の約数だから、

$f(n) = 1, 2, 3, 4, 6$ このとき、

$f(n^2) = 1, 4, 9, 6, 6$

そして、

$$f(n) \{f(n^2) + f(n)\} = 1 \{1 + 1\}, 2 \{2 + 4\}, 3 \{3 + 9\}, 4 \{4 + 6\}, 6 \{6 + 6\}$$

このうち適するものは $f(n) = 2$ である。

(2)

$$n^2 + n = n(n + 1)$$

は連続 2 整数の積ゆえ偶数であるから $f(n^2 + n)$ は偶数である。

(3)

$$\begin{aligned} n^{k+4} - n^k &= n^k (n^4 - 1) \\ &= n^k \{(n-2)(n-1)(n+1)(n+2) + 5n^2 - 5\} \\ &= n^{k-1} \left\{ \underbrace{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)}_{\text{連続 5 整数の積}} + 5 \underbrace{(n-1)n(n+1)}_{\text{連続 3 整数の積}} \right\} \end{aligned}$$

と表わせるから、 $n^{k+4} - n^k$ は 10 の倍数である。

$$\therefore f(n^{k+4}) = f(n^k)$$



フェルマーの小定理を思い出そう。

【演習 31】

a, b を互いに素な自然数とし、 $\frac{a}{b}$ はある自然数 a_1, a_2, a_3 によって、

$$\frac{a}{b} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}$$

と表されている。 $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}$ は既約分数とし、 $\frac{p_1}{q_1} = a_1, \frac{p_2}{q_2} = a_1 + \frac{1}{a_2}$ であるとする。 $xy - zw$

を $\begin{vmatrix} x & z \\ w & y \end{vmatrix}$ と書くとき、

(1) $\begin{vmatrix} p_2 & p_1 \\ q_2 & q_1 \end{vmatrix}$ の値を求めよ。

(2) $\begin{vmatrix} a_3 p_2 + p_1 & p_2 \\ a_3 q_2 + q_1 & q_2 \end{vmatrix}$ の値を求めよ。

(3) $a = a_3 p_2 + p_1, b = a_3 q_2 + q_1$ であることを示せ。

【1983 早稲田大学】

(1)

$$\frac{p_1}{q_1} = a_1$$

において、 p_1, q_1 は互いに素で、 a_1 は自然数だから、

$$q_1 = 1, p_1 = a_1$$

である。

$$\frac{p_2}{q_2} = a_1 + \frac{1}{a_2} \Leftrightarrow p_2 a_2 = (a_2 a_1 + 1) q_2$$

において、 $p_2 a_2$ は q_2 を約数にもつが、 p_1, q_1 は互いに素であるから、 q_2 は a_2 の約数である。

また、 $(a_2 a_1 + 1)$ は a_2 と互いに素であるから、 a_2 は q_2 の約数である。したがって、 $a_2 = q_2$ によって、

$$p_2 = a_2 a_1 + 1$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} p_2 & p_1 \\ q_2 & q_1 \end{vmatrix} &= p_2 q_1 - p_1 q_2 \\ &= \left(a_1 + \frac{1}{a_2} \right) q_2 q_1 - a_1 q_2 q_1 \\ &= \frac{q_2 q_1}{a_2} \\ &= \frac{q_2 q_1}{q_2} = q_1 = 1 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{vmatrix} a_3 p_2 + p_1 & p_2 \\ a_3 q_2 + q_1 & q_2 \end{vmatrix} = (a_3 p_2 + p_1) q_2 - p_2 (a_3 q_2 + q_1) \\ = p_1 q_2 - p_2 q_1 = 1$$

(3)

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}} \\ &= a_1 + \frac{a_3}{a_2 a_3 + 1} \\ &= \frac{a_1 (a_2 a_3 + 1) + a_3}{a_2 a_3 + 1} \end{aligned}$$

この両辺の分数はともに既約分数であるから、

$$\begin{aligned} a &= a_1 (a_2 a_3 + 1) + a_3 \\ &= a_3 (a_1 a_2 + 1) + a_1 \\ &= a_3 p_2 + p_1 \\ b &= a_2 a_3 + 1 = a_3 q_2 + q_1 \end{aligned}$$

【演習 32】

1 以上の整数全体の集合を \mathbf{S} とし、その部分集合 $\{3m + 7n \mid m, n \in \mathbf{S}\}$ を考えると、それはある整数 k 以上のすべての整数を含むことを示し、かつそのような k の最小値を求めよ。

【1983 横浜市大学】

$$\{3m + 7\}_{m=1,2,3,\dots} = \{10, 13, 16, 19, 22, 25, \dots\}$$

$$\{3m + 14\}_{m=1,2,3,\dots} = \{17, 20, 23, 26, 29, \dots\}$$

$$\{3m + 21\}_{m=1,2,3,\dots} = \{24, 27, 30, \dots\}$$

より、22 以上の整数はすべて含まれることがわかる。求める最小値は 22

【演習 33】

a, b を正の整数とする。

(1) $c = a + b, d = a^2 - ab + b^2$ とおくとき、不等式 $1 < \frac{c^2}{d} \leq 4$ が成り立つことを示せ。

(2) $a^3 + b^3$ が素数の整数乗になる a, b をすべて求めよ。

【1984 東京工業大学】

(1)

$$c = a + b$$

$$d = a^2 - ab + b^2$$

のとき、

$$\frac{c^2}{d} = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 - ab + b^2}$$

$$= 1 + \frac{3ab}{a^2 - ab + b^2}$$

$$= 1 + \frac{3}{\frac{a}{b} + \frac{a}{b} - 1}$$

$$\leq 1 + \frac{3}{2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b}} - 1} = 4 \dots\dots \textcircled{1}$$

$$1 < \frac{c^2}{d}$$

は明らか。

(2)

$$a^3 + b^3 = cd = p^n \text{ (} p : \text{は素数)}$$

となるとき、0以上の整数 k, j を用いて、

$$c = p^j, d = p^k$$

と表せる。(1)の結果より、

$$1 < \frac{p^{2j}}{p^k} = p^{2j-k} \leq 4$$

だから、

$$(p, 2j - k) = (2, 1), (2, 2), (3, 1)$$

(i) $(p, 2j - k) = (2, 1)$ のとき、

$$a + b = 2^j, a^2 - ab + b^2 = 2^{2j-1}$$

$$(a + b)^2 - 3ab = 2^{2j} - 3ab = 2^{2j-1}$$

$$\therefore 3ab = 2^{2j-1}$$

これをみたす a, b は存在しない。

(ii) $(p, 2j - k) = (2, 2)$ のとき、

$$a + b = 2^j, a^2 - ab + b^2 = 2^{2j-2}$$

$$(a + b)^2 - 3ab = 2^{2j} - 3ab = 2^{2j-2}$$

$$3ab = 3 \cdot 2^{2j-2}$$

$$ab = 2^{2j-2}$$

$$\therefore a = 2^\alpha, b = 2^\beta \ (\alpha + \beta = 2j - 2)$$

であるが、①で等号が成立するときは $a = b$ のときであるから、

$$a = b = 2^{j-1}$$

である。

(iii) $(p, 2j - k) = (3, 1)$ のとき、

$$a + b = 3^j, a^2 - ab + b^2 = 3^{2j-1}$$

$$(a + b)^2 - 3ab = 3^{2j} - 3ab = 3^{2j-1}$$

$$\therefore 3ab = 3^{2j-1}$$

$$\therefore ab = 3^{2j-2}$$

$$\therefore a = 3^\alpha, b = 3^\beta \ (\alpha + \beta = 2j - 2)$$

【演習 34】

a, b, c は整数で、 $a^3 + 2b^3 + 4c^3 = 2abc$ とする。

(1) a, b, c はいずれも偶数であることを示せ。

(2) $a = b = c = 0$ であることを示せ。

【1985 お茶の水女子大学】

(1)

$$a^3 + 2b^3 + 4c^3 = 2abc$$

$$a^3 = 2(abc - b^3 - 2c^3)$$

より、 $a = 2A (A \in \mathbb{Z})$ とおける。このとき、

$$8A^3 + 2b^3 + 4c^3 = 4Abc$$

$$b^3 = 2(Abc - c^3 - 2A^3)$$

これより、 $b = 2B (B \in \mathbb{Z})$ とおける。このとき、

$$8A^3 + 16B^3 + 4c^3 = 8ABc$$

$$c^3 = 2(ABc - A^3 - 2B^3)$$

これより、 $c = 2C (C \in \mathbb{Z})$ とおける。

(2) (1) の結果より、

$$A^3 + 2B^3 + 4C^3 = 2ABC$$

を得るから、 A, B, C も再び 2 の倍数になる。これを繰り返せば、 a, b, c は任意の n に対して 2^n の倍数となる。このような a, b, c は $a = b = c = 0$ である。

【演習 35】

$43x + 782y = 1$ と $2 < |x + 18y| < 12$ を満たす整数 x, y で、 $\left| \frac{x}{y} \right|$ が最大であるものを求めよ。

【1987 芝浦工業大学】

$$43x + 782y = 1 \dots\dots ①$$

の整数解の一般解を求める。まず、Euclid の互除法：

$$782 = 43 \times 18 + 8$$

$$43 = 8 \times 5 + 3$$

$$8 = 3 \times 2 + 2$$

$$3 = 2 \times 1 + 1$$

より、782 と 43 は互いに素であることがわかり、さらに、

$$1 = 3 - 2 \times 1$$

$$= 3 - (8 - 3 \times 2)$$

$$= -8 + 3 \times 3$$

$$= -8 + 3 \times (43 - 8 \times 5)$$

$$= 43 \times 3 - 8 \times 16$$

$$= 43 \times 3 - (782 - 43 \times 18) \times 16$$

$$= 43 \times 291 + 782 \times (-16)$$

として、①の特殊解が得られる。すなわち、

$$43 \times 291 + 782 \times (-16) = 1 \dots\dots ②$$

① - ② から、

$$43(x - 291) + 782(y + 16) = 0$$

$$\therefore \begin{cases} x - 291 = 782n \\ y + 16 = -43n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 782n + 291 \\ y = -43n - 16 \end{cases}$$

これを

$$2 < |x + 18y| < 12$$

に代入すると、

$$2 < |782n + 291 - 18(43n + 16)| < 12$$

$$\Leftrightarrow 2 < |8n + 3| < 12$$

$$\Leftrightarrow n = 0, n = 1, n = -1$$

これらの n に対して、 (x, y) の組は、

$$\left| \frac{y}{x} \right| = \frac{291}{16} = 18.1875, \frac{1073}{59} = 18.18644\dots, \frac{491}{27} = 18.1851\dots$$

よって、求める値は

$$\frac{291}{16}$$

である。

【演習 36】

実数 x に対し、 x を超えない最大の整数を $[x]$ で表す。

(1) 正の実数 a と自然数 m に対し、不等式

$$\frac{[ma]}{a} \leq m < \frac{[ma] + 1}{a}$$

を示せ。

(2) 正の実数 a, b が $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ を満たし、さらに、ある自然数 m, n に対し、 $[ma] = [nb]$ が成り立つならば、 a, b はともに有理数であることを証明せよ。

【1992 慶応大学】

(1)

$$\begin{aligned} ma - 1 &< [ma] \leq ma \\ \Leftrightarrow \frac{[ma]}{a} &\leq m < \frac{[ma] + 1}{a} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} &= 1, a > 0, b > 0 \\ [ma] &= [nb], m, n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

のとき、

$$[ma] = [nb] = k$$

とおくと、

$$\frac{k}{a} + \frac{k}{b} = k$$

(1) の結果より、

$$\begin{aligned} \frac{k}{a} &\leq m < \frac{k}{a} + \frac{1}{a} \cdots \cdots \textcircled{1} \\ \frac{k}{b} &\leq n < \frac{k}{b} + \frac{1}{b} \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

① + ② より

$$k \leq m + n < k + 1$$

だから、 $m+n=k$ である。従って、①,②の等号が成立する。

$$\therefore a = \frac{k}{m}, b = \frac{k}{n}$$

【演習 37】

x, y は互いに素な自然数とし、 M, N を $M = 11x + 2y, N = 18x + 5y$ とする。

- (1) M が 19 で割り切れるならば、 N も 19 で割り切れることを示せ。また、このとき、 M と N の最大公約数は 19 であることを示せ。
- (2) $M+x$ と $N+y$ の最大公約数は 2, 6, 18 のいずれかであることを示せ。

【1992 大阪市立大学】

(1)

$$\begin{cases} M = 11x + 2y \\ N = 18x + 5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 19x = 5M - 2N \\ 19y = -18M + 11N \end{cases}$$

のとき、 M が 19 で割り切れるならば、 N も 19 で割り切れる。

M, N の最大公約数を $19g$ とおくと、

$$M = 19gM', N = 19gN'$$

として、上の式に代入すると、

$$\begin{cases} x = g(5M' - 2N') \\ y = g(-18M' + 11N') \end{cases}$$

x, y は互いに素であるから、 $g = 1$ である。よって、 M, N の最大公約数は 19 である。

(2)

$$M + x = 12x + 2y = \alpha$$

$$N + y = 18x + 6y = \beta$$

とおくと、

$$\begin{cases} 3\alpha - \beta = 18x \\ 9\alpha + 6\beta = 18y \end{cases}$$

α, β の最大公約数を G とすると、 G は $18x, 18y$ の公約数である。 x, y は互いに素であるから、 G は 18 の約数である。また、 α, β はともに 2 を約数にもつから、偶数であるので、

$$G = 2, 6, 18$$

である。

【演習 38】

n は正の整数とする。

(1) n^2 と $2n + 1$ は互いに素であることを示せ。

(2) $n^2 + 2$ が $2n + 1$ の倍数になる n を求めよ。

【1992 一橋大学】

(1) n^2 と $2n + 1$ が互いに素でないと仮定すると、その公約数で素数 p がある。

$$n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$$

より、 $(n + 1)^2$ は p を約数にもつ。よって、 n も $n + 1$ も素数 p を約数にもつ。これは矛盾。

ゆえに n^2 と $2n + 1$ が互いに素である。

(2)

$$n^2 + 2 = k(2n + 1)$$

とおける。

$$n^2 - 2kn + 2 - k = 0$$

$$\therefore n = k + \sqrt{k^2 - 2 + k}$$

これより、

$$k^2 - 2 + k = m^2$$

となる正の整数 m がある。

$$\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = m^2$$

$$(2k + 1)^2 - 9 = 4m^2$$

$$(2k + 1 - 2m)(2k + 1 + 2m) = 9$$

と変形すれば、

$$(2k + 1 + 2m, 2k + 1 - 2m) = (9, 1), (3, 3)$$

$$\therefore (k, m) = (2, 2), (1, 0)$$

$$\therefore n = 4, 1$$

【演習 39】

k は 0 または正の整数とする。方程式 $x^2 - y^2 = k$ の解 (a, b) で a, b がともに奇数であるものを奇数解と呼ぶ。

(1) 方程式 $x^2 - y^2 = k$ が奇数解をもてば、 k は 8 の倍数であることを示せ。

(2) 方程式 $x^2 - y^2 = k$ が奇数解をもつための必要十分条件を求めよ。

【1992 京都大学】

(1)

$$x^2 - y^2 = k$$

が奇数解

$$x = 2m + 1, y = 2n + 1$$

をもつとき、

$$\begin{aligned} k &= (2m + 1)^2 - (2n + 1)^2 \\ &= 4m(m + 1) - 4n(n + 1) \end{aligned}$$

$m(m + 1), n(n + 1)$ はともに連続 2 整数の積だから 2 の倍数。よって、 k は 8 の倍数である。

(2) $k = 8K$ のとき、

$$(x + y)(x - y) = 8K$$

これは

$$\begin{aligned} x + y &= 4K, x - y = 2 \\ \Leftrightarrow x &= 2K + 1, y = 2K - 1 \end{aligned}$$

のとき成立する。よって、求める条件は k が 8 の倍数であることである。

【演習 40】

自然数 n に関する命題

P_n 「 $n = 2^a m$ (a は負でない整数、 m は奇数) と表せる」
を考える。

- (1) P_n が k より小さいすべての自然数 n について成り立つならば、 $n = k$ についても成り立つことを示せ。
- (2) P_1 は明らかに成り立つから (1) により、 P_n はすべての自然数 n について成り立つことになる。このことを用いて次を示せ。

N を自然数とする。1 から $2N$ までの自然数の中からどのように $(N+1)$ 個の数を選んでも、その中に一方が他方を割り切るような 2 つの数の組が存在する。

【1993 大阪教育大学】

- (1) k が奇数のときは $k = 2^0 k$ と書いて成立する。 k が偶数のときは $k = 2K$ とおけて、 $K = 2^a m$ (a は負でない整数、 m は奇数) と表せるから、

$$k = 2^{a+1} m$$

となって、成立。

- (2) $(1, 2), (2, 4), (3, 6), \dots, (N, 2N)$ の N 個の組をつくると $2N+1$ 個の数を選べば、その中に少なくとも、 $(k, 2k)$ の 2 数の 1 組は含まれる。よって、示すことができた。



この証明を [Pigeonhole Principle](#) といいます。Web 上にあります。

If more than half of the integers from 1, 2, ..., $2n$ are selected, then some two of the selected integers are mutually prime.

【演習 41】

素数 $5, 17, 257$ はそれぞれ $2^2 + 1, 2^4 + 1, 2^8 + 1$ と表すことができる。いま、正の整数 n に対し、 $2^n + 1$ が素数であれば、 n は、 2 の累乗でなければならないことを、つぎの方針で証明せよ。

(1) 正の奇数 a に対し、整式 $x^a + 1$ は

$$(x+1)f(x) \quad f(x) \text{ は整数係数の整式}$$

と因数分解できることを示せ。

(2) 2 以上の整数 m と、 3 以上の奇数 a に対し、 $m^a + 1$ は素数ではないことを示せ。

(3) 上記のことを用いて、最初の命題を証明せよ。

【1994 明治大学】

(1)

$$\begin{aligned} x^a + 1 &= 1 - (-x)^a \\ &= (1+x) \left(1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-x)^{a-1} \right) \\ \therefore f(x) &= 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-x)^{a-1} \end{aligned}$$

(2)

$$m^a + 1 = (1+m) \left(1 - m + m^2 + \cdots + (-m)^{a-1} \right)$$

であって、

$$1+m \geq 3, 1-m+m^2+\cdots+(-m)^{a-1} \geq 1-m+m^2 \geq 3$$

であるから、 $m^a + 1$ は素数ではない。

(3) a が 3 以上の奇数のとき、 $2^a + 1$ は素数ではない。したがって、 $2^a + 1$ が素数であるためには $a = 2, 1$ または a は偶数であることが必要。

偶数 a に対して、 $a = 2^k b (k \geq 1, b : \text{odd})$ となる k, b がある。 $b \neq 1$ とすると、

$$2^a + 1 = \left(2^{2^k} \right)^b + 1$$

は素数ではないから、 $b = 1$ でなければならない。よって、 $2^a + 1$ が素数であるときは

$$a = 2^k (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

である。

【演習 42】

正の整数 a, b, c, d が等式 $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ を満たすとする。

- (1) d が 3 の倍数でないならば、 a, b, c の中に 3 の倍数がちょうど 2 つあることを示せ。
- (2) d が 2 の倍数でも 3 の倍数でもないならば、 a, b, c のうち少なくとも 1 つは 6 の倍数であることを示せ。

【1994 一橋大学】

- (1) 整数 A を 3 で割った剰余が r であることを $A \equiv r$ と表す。

$$a \equiv 0 \Leftrightarrow a^2 \equiv 0$$

$$a \equiv \pm 1 \Leftrightarrow a^2 \equiv 1$$

が成り立つ。 a^2, b^2, c^2 の 3 の剰余の組み合わせは、

$$\{0, 0, 0\}, \{0, 0, 1\}, \{0, 1, 1\}, \{1, 1, 1\}$$

の 4 通りであるが、これらのとき、 d^2 の 3 の倍数ではないから、

$$\{0, 0, 1\}, \{0, 1, 1\}$$

であるが、

$$\{0, 1, 1\}$$

のときは d^2 の剰余が 2 となって、不可。よって、

$$\{0, 0, 1\}$$

である。すなわちちょうど 2 個が 3 の倍数である。

- (2)

$$a = 2m \Rightarrow a^2 = 4m^2$$

$$a = 2m + 1 \Rightarrow a^2 = 4(m^2 + m) + 1$$

より、平方数を 4 で割った剰余は 0 か 1 である。 a^2, b^2, c^2 の 4 の剰余の組み合わせは、

$$\{0, 0, 0\}, \{0, 0, 1\}, \{0, 1, 1\}, \{1, 1, 1\}$$

の 4 通りであるが、 d^2 の 4 の倍数ではないから、

$$\{0, 0, 1\}$$

だけが適す。すなわち、 a, b, c のちょうど 2 個が 2 の倍数である。

以上より、 a, b, c のうち少なくとも 1 つは 6 の倍数である。

【演習 43】

(1) α, β を互いに素な正の整数とする。

[1] $\alpha x - \beta y = 0$ の整数解をすべて求めよ。

[2]

$$\frac{\alpha}{\beta} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4}}} \quad (a_1, a_2, a_3, a_4 \text{ は正の整数})$$

とかけるとする。

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}$$

を通分して得られる分子 $a_1 a_2 a_3 + a_1 + a_3$ を p , 分母 $a_2 a_3 + 1$ を q とするとき、 $\alpha q - \beta p$ の値を求めよ。

(2) $157x - 68y = 3$ の整数解をすべて求めよ。

【1993 早稲田大学】

(1) [1]

$$\alpha x = \beta y$$

を満たす整数 x, y は α, β が互いに素だから、

$$x = \beta m, y = \alpha m \quad (m \in \mathbb{Z})$$

[2]

$$\begin{aligned} a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}} &= a_1 + \frac{a_3}{a_2 a_3 + 1} \\ &= \frac{a_1 a_2 a_3 + a_1 + a_3}{a_2 a_3 + 1} \end{aligned}$$

より、

$$p = a_1 a_2 a_3 + a_1 + a_3, q = a_2 a_3 + 1$$

とおく。

さて、いま、 a, b が互いに素で、 a, b, c が自然数のとき、 $ac + b$ と a は互いに素である。何故ならば $ac + b$ と a が公約数 g をもてば、 b も g を約数にもって、 a, b が互いに素であることに矛盾するからである。よって、

$$c + \frac{b}{a} = \frac{ac + b}{a}$$

は既約分数。1 と a_3 は互いに素であるから、

$$a_3 + \frac{1}{a_4}$$

は既約分数。したがって、

$$a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4}}$$

は既約分数。したがって、

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4}}}$$

は既約分数である。

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\beta} &= a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4}}} \\ &= a_1 + \frac{1}{\frac{a_2 a_3 a_4 + a_2 + a_4}{a_3 a_4 + 1}} \\ &= a_1 + \frac{a_3 a_4 + 1}{a_2 a_3 a_4 + a_2 + a_4} \\ &= \frac{a_1 a_2 a_3 a_4 + a_1 a_2 + a_1 a_4 + a_3 a_4 + 1}{a_2 a_3 a_4 + a_2 + a_4} \\ &= \frac{(p - a_1 - a_3) a_4 + a_1 a_2 + a_1 a_4 + a_3 a_4 + 1}{(q - 1) a_4 + a_2 + a_4} \\ &= \frac{p a_4 + a_1 a_2 + 1}{q a_4 + a_2} \end{aligned}$$

であるから、

$$\alpha = p a_4 + a_1 a_2 + 1, \beta = q a_4 + a_2$$

となる。このとき、

$$\begin{aligned} \alpha q - \beta p &= (p a_4 + a_1 a_2 + 1) q - (q a_4 + a_2) p \\ &= q a_1 a_2 + q - p a_2 \\ &= a_1 a_2 (a_2 a_3 + 1) + a_2 a_3 + 1 - (a_1 a_2 a_3 + a_1 + a_3) a_2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \frac{157}{68} &= 2 + \frac{21}{68} \\ &= 2 + \frac{1}{\frac{68}{21}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{5}{21}} \\ &= 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{21}{5}}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5}}} \end{aligned}$$

と表せるから、上の結果の p, q を求めると、

$$p = 2 \times 3 \times 4 + 2 + 4 = 30$$

$$q = 3 \times 4 + 1 = 13$$

よって、

$$157 \cdot 13 - 68 \cdot 30 = 1$$

が成り立つ。

$$157x - 68y = 3 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$157 \cdot 39 - 68 \cdot 90 = 3 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

① - ② より、

$$157(x - 39) - 68(y - 90) = 0$$

157 と 68 は互いに素だから、

$$x - 39 = 68m, y - 90 = 157m$$

$$\therefore x = 39 + 68m, y = 90 + 157m (m \in \mathbb{Z})$$

【演習 44】

n は 2 以上の整数とする。

(1) n で割ると 1 余る正の整数は n と互いに素であることを示せ。

(2) $(n-1)n(n+1)$ の正の約数で n で割ると 1 余るものをすべて求めよ。

【1995 お茶の水女子大学】

(1) n で割ると 1 余る数は、 $a = nq + 1$ と表せる。これと n との最大公約数を g とすると、 $a - nq$ は g を約数にもつことになるが、 $a - nq = 1$ だから、 g は 1 の約数になる。よって、 $g = 1$ である。つまり、 a と n は互いに素である。

(2) n で割ると 1 余る数を $nq + 1$ とおく。これと n は互いに素である。 $nq + 1$ は $(n-1)(n+1)$ の約数となる。

$$(n-1)(n+1) = A(nq+1), A \geq 1$$

これより、

$$(n-1)(n+1) \geq nq+1$$

$$\therefore n^2 - nq - 2 \geq 0$$

これが $n \geq 2$ で成立するから、

$$4 - 2q - 2 \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq q$$

$$\therefore q = 0, 1$$

求めるものは、1 と $n+1$ である。

【演習 45】

自然数 n に対して、実数 $f(n)$ を次の規則で定める。

(A) $f(1) = 1$

(B) 素数 p , 自然数 a に対して、 $f(p^a) = p^a \left(1 - \frac{1}{p}\right)$

(C) 自然数 m, n が互いに素であるとき、 $f(mn) = f(m)f(n)$

(1) 自然数 $n (n \geq 2)$ を $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r} (a_i \geq 1)$ と素因数分解するとき、 $\frac{f(n)}{n}$ を p_1, p_2, \dots, p_r を用いて表せ。

(2) $f(n) = \frac{1}{3}n$ となるとき、 $n = 2^a \cdot 3^b (a \geq 1, b \geq 1)$ と表されることを示せ。

【1993 横浜市立大学】

(1) $p_i^{a_i}, p_j^{a_j}$ は互いに素であるから、

$$\begin{aligned} f(n) &= f(p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}) \\ &= f(p_1^{a_1}) f(p_2^{a_2}) \cdots f(p_r^{a_r}) \\ &= p_1^{a_1} \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) p_2^{a_2} \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots p_r^{a_r} \left(1 - \frac{1}{p_r}\right) \\ &= n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right) \\ \therefore \frac{f(n)}{n} &= \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right) \end{aligned}$$

(2)

$$f(n) = \frac{1}{3}n$$

のとき、

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right) &= \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow 3(p_1 - 1)(p_2 - 1)(p_3 - 1) \cdots (p_r - 1) &= p_1 p_2 p_3 \cdots p_r \end{aligned}$$

ここで、

$$p_1 < p_2 < p_3 < \cdots < p_r$$

と仮定してよい。いま、 $p_1 \neq 2$ とすると、 $p_1, p_2, p_3, \dots, p_r$ はすべて奇数であるから、左辺は偶数、右辺は奇数。よって、 $p_1 = 2$ である。また、左辺に 3 の素因数があるから、 $p_2 = 3$ である。 p_3 以降の素数が存在したとすると、

$$(p_3 - 1) \cdots (p_r - 1) = p_3 \cdots p_r$$

この両辺の偶奇は一致しないので、 p_3 以降の素数が存在しない。

よって、 $n = 2^a \cdot 3^b (a \geq 1, b \geq 1)$ と表される

【演習 46】

p, q を互いに素な正の整数とする。

- (1) 平面上の点 $(p, 0)$ と点 $(0, q)$ を結ぶ線分上にはこの 2 点以外に格子点が存在しないことを示せ。ただし、格子点とはその x 座標、 y 座標がともに整数であるような点をいう。
- (2) 不等式 $0 < x < p, 0 < y < q, \frac{x}{p} + \frac{y}{q} < 1$ を満たす格子点 (x, y) の個数を p, q を使って表せ。

【1989 津田塾大学】

(1)

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1 \quad (0 < x < p, 0 < y < q) \cdots \cdots \textcircled{1}$$

を満たす整数 x, y が存在したとすると、

$$qx + py = pq$$

$$qx = p(q - y)$$

p, q は互いに素であるから、 x は p の倍数であるが、 $0 < x < p$ に p の倍数は存在しない。よって、 $\textcircled{1}$ を満たす格子点は存在しない。

(2)

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} < 1 \quad (0 < x < p, 0 < y < q)$$

を満たす格子点の個数を S とする。領域

$$0 < x < p, 0 < y < q$$

を満たす格子点の個数は $2S$ であるが、これは

$$(p - 1)(q - 1)$$

であるから、

$$S = \frac{1}{2}(p - 1)(q - 1)$$



領域を $x = k (k = 1, 2, \dots, p-1)$ で切ると、切り口は

$$0 < y < q - \frac{qk}{p}$$

この上の格子点の個数は

$$\left[q - \frac{qk}{p} \right]$$

であるから、求めるものは、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p-1} \left[q - \frac{qk}{p} \right] &= \left[q - \frac{q}{p} \right] + \left[q - \frac{2q}{p} \right] + \dots + \left[q - \frac{(p-1)q}{p} \right] \\ &= \left[\frac{(p-1)q}{p} \right] + \left[\frac{(p-2)q}{p} \right] + \dots + \left[\frac{q}{p} \right] \end{aligned}$$

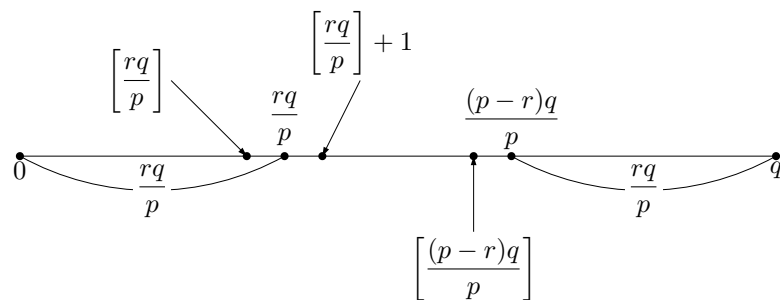
である。

ここで、下図より

$$\begin{aligned} \left[\frac{rq}{p} \right] + 1 &= q - \left[\frac{(p-1)q}{p} \right] \\ \Leftrightarrow \left[\frac{rq}{p} \right] + \left[\frac{(p-1)q}{p} \right] &= q - 1 \end{aligned}$$

が成り立つから、格子点の合計 S は

$$\begin{aligned} S + S &= \left[\frac{(p-1)q}{p} \right] + \left[\frac{(p-2)q}{p} \right] + \dots + \left[\frac{q}{p} \right] \\ &+ \left[\frac{q}{p} \right] + \left[\frac{2q}{p} \right] + \dots + \left[\frac{(p-1)q}{p} \right] \\ &= (q-1)(p-1) \\ \therefore S &= \frac{1}{2}(q-1)(p-1) \end{aligned}$$



【演習 47】

方程式 $n^{2n} = 65536$ を満たす正の整数 n の値を求めよ。

【1989 東北学院大学】

$$65536 = 2^{16} = 4^8$$

より、 $n^{2n} = 65536$ を満たす正の整数 n は $n = 4$

【演習 48】

- (1) 整数 a が 3 の倍数でなければ、 a^2 を 3 で割った余りは 1 であることを示せ。
- (2) $a^2 - 2b^2$ が 3 の倍数であるような整数 a, b はともに 3 の倍数であることを示せ。
- (3) $a^2 - 2b^2 + 3c^2 - 6d^2 = 0$ を満たす整数 a, b, c, d は $a = b = c = d = 0$ のみであることを示せ。

【1991 明治大学】

- (1) 整数 a が 3 の倍数でなければ、 $a = 3m \pm 1$ とおける。このとき、

$$a^2 = (3m \pm 1)^2 = 3(3m^2 \pm 2m) + 1$$

は 3 で割った余りは 1 である。

- (2) a を 3 で割った余りを $R(a)$ と表す。 a, b 少なくとも 1 つが 3 の倍数でないとき、 $a^2 - 2b^2$ を 3 で割った余りは下表の通り。

a	0	1	1
b	1	0	1
$R(a^2)$	0	1	1
$R(b^2)$	1	0	1
$R(a^2 - 2b^2)$	1	1	2

よって、 $a^2 - 2b^2$ が 3 の倍数であるような整数 a, b はともに 3 の倍数である。

- (3)

$$a^2 - 2b^2 = 3(2d^2 - c^2)$$

より、 a, b ともに 3 の倍数である。そこで、 $a = 3A, b = 3B$ とおける。このとき、

$$9A^2 - 18B^2 = 3(2d^2 - c^2)$$

$$\therefore c^2 - 2d^2 = 3(2B^2 - A^2)$$

したがって、 c, d ともに 3 の倍数である。そこで、 $c = 3C, d = 3D$ とおける。このとき、

$$A^2 - 2B^2 + 3C^2 - 6D^2 = 0$$

これは、最初の式と全く同じものである。同じ論法をいくらでも繰り返せば、 a, b, c, d はいくらでも 3 で割れる整数となる。そのようなものは、 $a = b = c = d = 0$ である。

【演習 49】

$0 < a \leq b \leq 1$ を満たす有理数 a, b に対し、 $f(n) = an^3 + bn$ とおく。このとき、どのような整数 n に対しても $f(n)$ は整数となり、 n が偶数ならば $f(n)$ も偶数となるような a, b の組をすべて求めよ。
【1991 金沢大学】

$$f(1) = a + b \in \mathbb{Z} \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$f(3) = 27a + 3b \in \mathbb{Z} \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$f(2) = 8a + 2b = \text{even} \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\Rightarrow 4a + b \in \mathbb{Z} \cdots \cdots \textcircled{4}$$

①と④より、 $3a$ が整数であるから、 $0 < a \leq b \leq 1$ に注意して $a = \frac{1}{3}, 1$ である。このとき、 $b = \frac{2}{3}, 1$ である。

$a = \frac{1}{3}, b = \frac{2}{3}$ のとき、

$$f(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{2}{3}n = \frac{(n-1)n(n+1) + 3n}{3}$$

であるから、条件にかなう。

$a = b = 1$ も条件を満たすものである。

【演習 50】

a, b を整数、 u, v を有理数とする。 $u + v\sqrt{3}$ が $x^2 + ax + b = 0$ の解であるならば、 u, v はともに整数であることを示せ。ただし、 $\sqrt{3}$ が無理数であることを用いてもよい。

【1999 京都大学】

$$(u + v\sqrt{3})^2 + a(u + v\sqrt{3}) + b = 0$$

$$\Leftrightarrow u^2 + 3v^2 + au + b + (2uv + av)\sqrt{3} = 0$$

$2uv + av \neq 0$ と仮定すると、

$$\sqrt{3} = -\frac{u^2 + 3v^2 + au + b}{2uv + av}$$

この右辺は有理数だから、矛盾。よって、

$$\begin{cases} 2uv + av = 0 \Leftrightarrow v = 0, 2u + a = 0 \\ u^2 + 3v^2 + au + b = 0 \end{cases}$$

(i) v のとき、 $u = \frac{n}{m}$ とおく。ここに m, n は互いに素で、 $m \geq 1$ とする。

$$\begin{aligned}\left(\frac{n}{m}\right)^2 + a\left(\frac{n}{m}\right) + b &= 0 \\ n^2 + amn + bm^2 &= 0 \\ n^2 &= -m(an + bm)\end{aligned}$$

m は n^2 の約数であるから、 $m = 1$ である。よって、 u も整数である。

(ii) $2u + a = 0$ のとき、

$$u^2 + 3v^2 + au + b = 0$$

に代入して、

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}a^2 + 3v^2 - \frac{1}{2}a^2 + b &= 0 \\ \Leftrightarrow 12v^2 - a^2 + 4b &= 0\end{aligned}$$

$v = \frac{p}{q}$ とおき、ここに p, q は互いに素で、 $q \geq 1$ とする。

$$\begin{aligned}12\left(\frac{p}{q}\right)^2 - a^2 + 4b &= 0 \\ 12p^2 - a^2q^2 + 4bq^2 &= 0 \\ 12p^2 &= q^2(a^2 - 4b)\end{aligned}$$

p, q は互いに素だから、 q^2 は 12 の約数である。従って、

$$q = 1, 2$$

$q = 1$ のとき、 $v = p$ で、

$$\begin{aligned}12p^2 - a^2 + 4b &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2 &= 4(3p^2 + b)\end{aligned}$$

となるから、 a は偶数で、 $2u = -a$ だったから、 u は整数となる。

$q = 2$ のとき、 p, q は互いに素だから、 p は奇数。

$$\begin{aligned}12p^2 - 4a^2 + 16b &= 0 \\ 3p^2 - a^2 + 4b &= 0\end{aligned}$$

これより、 a は奇数である。 $a = 2A + 1, p = 2P + 1$ とおくと、

$$\begin{aligned}3(2P + 1)^2 - (2A + 1)^2 + 4b &= 0 \\ 12P^2 + 12P + 2 - 4A^2 - 4A + 4b &= 0 \\ 6P(P + 1) - 2A(A + 1) &= -(2b + 1)\end{aligned}$$

この左辺は偶数、右辺は奇数であるから、これは不適。

以上より、 u, v は整数である。



$v = 0$ のときは、上の解答通り。

$v \neq 0$ のときは有理係数の 2 次方程式が無理数解 $u + v\sqrt{3}$ を解にもつから、それと共役な解 $u - v\sqrt{3}$ も解にもつ。

解と係数の関係より、

$$\begin{cases} 2u = -a \\ u^2 - 3v^2 = b \end{cases}$$

u を消去して、

$$\begin{aligned} a^2 - 12v^2 &= 4b \\ a^2 &= 4(3v^2 - b) \end{aligned}$$

これより a は偶数となり、 u は整数となる。 $a = 2A$ とおくと、

$$A^2 = 3v^2 - b$$

$v = \frac{r}{s}$ において、 r, s は互いに素で、 $s \geq 1$ とする。

$$\frac{A^2 + b}{3} = \frac{r^2}{s^2}$$

右辺は既約分数だから、 $s = 1$ で $A^2 + b$ は 3 の倍数である。よって、 u, v は整数となる。

【演習 51】

- (1) 等式 $(x^2 - ny^2)(z^2 - nt^2) = (xz + nty)^2 - n(xt + yz)^2$ を示せ。
- (2) $x^2 - 2y^2 = -1$ の自然数解 (x, y) が無限組であることを示し、 $x > 100$ となる解を 1 組求めよ。

【1998 お茶の水女子大学】

(1)

$$\begin{aligned} & (x^2 - ny^2)(z^2 - nt^2) \\ &= (x + \sqrt{ny})(x - \sqrt{ny})(z + \sqrt{nt})(z - \sqrt{nt}) \\ &= \{(x + \sqrt{ny})(z + \sqrt{nt})\} \{(x - \sqrt{ny})(z - \sqrt{nt})\} \\ &= \{xz + nyt + (xt + yz)\sqrt{n}\} \{xz + nyt - (xt + yz)\sqrt{n}\} \\ &= (xz + nyt)^2 - n(xt + yz)^2 \end{aligned}$$

(2) (1) の等式で $n = 2, z = 3, t = 2$ とおくと、

$$x^2 - 2y^2 = (3x + 4y)^2 - 2(2x + 3y)^2$$

そこで、

$$\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + 4y_n \\ y_{n+1} = 2x_n + 3y_n \end{cases}$$
$$x_1 = 1, y_1 = 1$$

とおくと、

$$x_1^2 - 2y_1^2 = -1$$

$$x_k^2 - 2y_k^2 = -1 \Rightarrow x_{k+1}^2 - 2y_{k+1}^2 = -1$$

が成り立つから、すべての自然数 n に対して、 (x_n, y_n) は $x^2 - 2y^2 = -1$ の解であり、この数列は増加列だから、無数に解がある。

$$(x_2, y_2) = (7, 5)$$

$$(x_3, y_3) = (41, 29)$$

$$(x_4, y_4) = (259, 169)$$

より、 $x > 100$ の 1 つの解は $(259, 169)$ である。

【演習 52】

次の条件

$$\begin{cases} ax + y = 2 \\ x - (a + 1)y < 2a \end{cases}$$

を満たす正の整数 x, y の組み合わせをすべて求めよ。ただし、 a が実数の定数とする。

【1997 法政大学】

$$a = \frac{2 - y}{x}$$

より、 a を消去。

$$x - \left(\frac{2 - y}{x} + 1 \right) y < 2 \cdot \frac{2 - y}{x}$$

$$x^2 - 2y + y^2 - xy < 4 - 2y$$

$$x^2 - xy + y^2 < 4$$

$$\left(x - \frac{y}{2} \right)^2 + \frac{3y^2}{4} < 4$$

$$\frac{3y^2}{4} < 4 \Leftrightarrow y^2 < \frac{16}{3}$$

$$\therefore y = 1, 2$$

$y = 1$ のとき、

$$x^2 - x < 3$$

$$\therefore x = 1, 2$$

$y = 2$ のとき、

$$x^2 - 2x < 0$$

$$\therefore x = 1$$

【演習 53】

整数 n に対し $f(n) = \frac{n(n-1)}{2}$ とおき、 $a_n = i^{f(n)}$ と定める。ただし、 i は虚数単位を表す。
このとき、 $a_{n+k} = a_n$ が任意の整数 n に対して成り立つような正の整数 k をすべて求めよ。

【2001 京都大学】

$$\begin{aligned} f(n+k) - f(n) &= \frac{(n+k)(n+k-1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} \\ &= \frac{(2k-2)n + k(k-1)}{2} \\ &= \frac{1}{2}(k-1)(2n+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{n+k} &= a_n \\ \Leftrightarrow i^{f(n+k)-f(n)} &= 1 \\ \Leftrightarrow f(n+k) - f(n) &= 4m \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}k(2n+k-1) &= 4m \\ \Leftrightarrow k(2n+k-1) &= 8m \end{aligned}$$

が成り立つような k は 8 で割ると 1 余る数である。

$$k + 2n + k - 1 = 2(n+k) - 1 = \text{奇数}$$

だから、 k と $2n+k-1$ の偶奇は一致せず。 k が奇数とすると、 $k = 2K+1$ とおいて、

$$2n + 2K + 1 - 1 = 8M$$

$$n + k = 4M$$

これが任意の n で成立することはない。よって、 k が 8 の倍数である。

【演習 54】

p, q を整数とし、 $f(x) = x^2 + px + q$ とおく。

- (1) 有理数 a が方程式 $f(x) = 0$ の 1 つの解ならば、 a は整数であることを示せ。
(2) $f(1)$ も $f(2)$ も 2 で割り切れないとき、方程式 $f(x) = 0$ は整数解をもたないことを示せ。

【2000 愛媛大学】

(1)

$$\alpha = \frac{u}{v}$$

とおき、 u, v は互いに素で、 $v \geq 1$ とする。

$$\begin{aligned} \left(\frac{u}{v}\right)^2 + p\left(\frac{u}{v}\right) + q &= 0 \\ \Leftrightarrow u^2 &= -v(pu + qv) \end{aligned}$$

v は u の約数であるが、 u, v は互いに素であるから、 $v = 1$
よって、 α は整数である。

(2)

$$f(n) = n^2 + pn + q$$

とおく。

$$\begin{aligned} f(n+1) - f(n) &= 2n + 1 + p \\ f(n+2) - f(n+1) - f(n+1) + f(n) &= 2 \\ \therefore f(n+2) &= 2f(n+1) - f(n) + 2 \end{aligned}$$

- (i) $f(1), f(2)$ は奇数である。
(ii) $f(k), f(k+1)$ が奇数であると仮定すると、

$$f(k+2) = 2f(k+1) - f(k) + 2$$

より、すべての $n \geq 1$ で $f(n)$ は奇数である。

また、

$$f(k) = 2f(k+1) - f(k+2) + 2$$

を用いると、整数 $k, k-1$ について $f(k), f(k-1)$ が奇数ならば、 $f(k-2)$ も奇数になるので、
結局、すべての整数 n に対して、 $f(n)$ は奇数になる。よって、 $f(x) = 0$ は整数解をもたない。

【演習 55】

p を 3 より大きい素数とする。自然数 a, b, c に対し $a + b + c, a^2 + b^2 + c^2, a^3 + b^3 + c^3$ がそれぞれ p の倍数であるとき、つぎのことを証明せよ。

(1) $ab + bc + ca$ は p の倍数である。

(2) abc は p の倍数である。

(3) a, b, c はすべて p の倍数である。

【1986 同志社大学】

(1)

$$2(ab + bc + ca) = (a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$$

より、 $2(ab + bc + ca)$ は素数 $p(> 3)$ を因数にもち、 p は奇数だから、 $ab + bc + ca$ は p の倍数である。

(2)

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

$$3abc = a^3 + b^3 + c^3 - (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

より、 $3abc$ は素数 p を因数にもち、 p は 3 ではないから、 abc は p の倍数である。

(3)

$$a + b + c = pl$$

$$ab + bc + ca = pm$$

$$abc = pn$$

とおけるから、 a, b, c は

$$x^3 - plx^2 + pmx - pn = 0$$

の 3 解である。

$$a^3 = p(la^2 - ma + n)$$

より、 a は p の倍数である。 b, c も同様である。

【演習 56】

n を自然数とする。次の問に答えよ。

- (1) n を 3 で割ったあまりが 1 であるならば、すべての自然数 m に対して n^m を 3 で割った余りは 1 であることを示せ。
- (2) n を 3 で割った余りが 2 ならば、すべての奇数 m に対して n^m を 3 で割った余りは 2 であることを示せ。
- (3) n^m を 3 で割った余りが 2 となる自然数 m があれば n を 3 で割った余りも 2 であることを示せ。

【2007 お茶の水女子大学】

- (1) $n = 3p + 1$ のとき、

$$\begin{aligned} n^m &= (3p + 1)^m \\ &= 1 + {}_m C_1 (3p) + {}_m C_2 (3p)^2 + \cdots \\ &= 1 + 3M \end{aligned}$$

と表せるから、 n^m を 3 で割ると 1 余る。

- (2) $n = 3p - 1$ のとき、 m を奇数とすると、

$$\begin{aligned} n^m &= (3p - 1)^m \\ &= -1 + {}_m C_1 (3p) - {}_m C_2 (3p)^2 + \cdots \\ &= -1 + 3M \end{aligned}$$

と表せるから、 n^m を 3 で割ると 1 余る。

- (3) $n = 3p + r (r = 0, 1, -1)$ とおくと、

$$\begin{aligned} n^m &= (3p + r)^m \\ &= r^m + {}_m C_1 r^{m-1} (3p) + {}_m C_2 r^{m-1} (3p)^2 + \cdots \\ &= r^m + 3M \\ &= \begin{cases} 1 & (: r = 1) \\ (-1)^m & (: r = -1) \\ 0 & (: r = 0) \end{cases} \end{aligned}$$

n^m を 3 で割ると 2 余ることがあるのは $r = -1, m$ が奇数のときである。すなわち、 n を 3 で割った余りも 2 である。

【演習 57】

p を素数、 n を 0 以上の整数とする。

- (1) m は整数で $0 \leq m \leq n$ とする。1 から p^{n+1} までの整数の中で、 p^m で割り切れ p^{m+1} で割り切れないものの個数を求めよ。
- (2) 1 から p^{n+1} までの 2 つの整数 x, y に対し、その積 xy が p^{n+1} で割り切れるような組 (x, y) の個数を求めよ。

【2007 東京工業大学】

(1)

$$\left[\frac{p^{n+1}}{p^m} \right] - \left[\frac{p^{n+1}}{p^{m+1}} \right] = p^{n+1-m} - p^{n-m} = p^{n-m} (p - 1)$$

(2) x, y を素因数分解をして

$$x = p^i \cdot q, y = p^j \cdot r \quad (1 \leq i, j \leq n+1)$$

となったとする。このとき、条件を満たすものは

$$i + j \geq n + 1$$

なる各 (i, j) に対して、 p^i で割れて、 p^{i+1} で割れない x と p^j で割れて、 p^{j+1} で割れない y の組み合わせの個数である。または、一方が p^{n+1} で他方が任意のときも条件を満たし、その個数は、

$$2p^{n+1} - 1$$

個あるから、求める個数は

$$\begin{aligned} & \sum_{0 \leq i, j \leq n, i+j \geq n+1} p^{n-i} (p-1) \cdot p^{n-j} (p-1) + 2p^{n+1} - 1 \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=n+1-i}^n p^{n-i} (p-1) \cdot p^{n-j} (p-1) + 2p^{n+1} - 1 \\ &= (p-1)^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=n+1-i}^n p^{2n-i-j} + 2p^{n+1} - 1 \\ &= (p-1)^2 \sum_{i=0}^n p^{n-i} \frac{p^i - 1}{p-1} + 2p^{n+1} - 1 \\ &= (p-1) \sum_{i=0}^n (p^n - p^{n-i}) + 2p^{n+1} - 1 \\ &= (p-1) \left\{ p^n (n+1) - \frac{p^{n+1} - 1}{p-1} \right\} + 2p^{n+1} - 1 \\ &= (p-1) p^n (n+1) - p^{n+1} + 1 + 2p^{n+1} - 1 \\ &= (n+2) p^{n+1} - (n+1) p^n \end{aligned}$$

【演習 58】

p を 3 以上の素数とする。4 個の整数 a, b, c, d が次の 3 条件

$$a + b + c + d = 0, ad - bc + p = 0, a \geq b \geq c \geq d$$

を満たすとき、 a, b, c, d を p で表せ。

【2007 京都大学】

$d = -a - b - c$ より、

$$ad - bc + p$$

$$= a(-a - b - c) - bc + p = 0$$

$$\Leftrightarrow p = a^2 + ab + ac + bc$$

$$\Leftrightarrow p = (a + b)(a + c)$$

ここに、 $a + b \geq c + d, a + b = -(c + d)$ であるから、 $a + b \geq 0 \geq c + d$

$$\therefore a + b = p, a + c = 1$$

$$\Leftrightarrow b = p - a, c = 1 - a, d = a - p - 1$$

これを

$$a \geq b, c \geq d$$

に代入して、

$$a \geq p - a, 1 - a \geq a - p - 1$$

$$\Leftrightarrow p \leq 2a \leq p + 2$$

p は奇数であるから、 $2a = p + 1$

$$\therefore a = \frac{p+1}{2}, b = \frac{p-1}{2}, c = \frac{-p+1}{2}, d = \frac{-p-1}{2}$$

【演習 59】

次の問いに答えよ。

(1) すべての整数 m に対して $\frac{pm}{m^2 - m - 1}$ がつねに整数となるような定数 p を求めよ。

(2) a, b を定数として整式 $f(x)$ を

$$f(x) = x^4 + ax^2 + bx - a - 2$$

によって定義する。すべての整数 m に対して $\frac{f(m)}{m^2 - m - 1}$ がつねに整数となるための必要十分条件を a, b を用いて表せ。

【2005 北海道大学】

(1)

$$m = [p] + 3$$

とおくと、

$$\left| \frac{pm}{m^2 - m - 1} \right| = \left| \frac{p}{m - 1 - \frac{1}{m}} \right| = \left| \frac{p}{[p] + 3 - 1 - \frac{1}{[p] + 3}} \right|$$
$$< \left| \frac{p}{p + 1 - \frac{1}{[p] + 2}} \right| < 1$$

よって、

$$\frac{pm}{m^2 - m + 1} = 0$$

これが任意の m で成り立つ。

$$\therefore p = 0$$

(2)

$$\frac{f(m)}{m^2 - m + 1} = m^2 + m + a + 2 + \frac{(a + b + 3)m}{m^2 - m + 1}$$

$m = 0$ において、 $a + 2$ となるから、 a は整数。

$m = 1$ において、 $-b + 1$ となるから、 b は整数。さらに、

$$\frac{f(m)}{m^2 - m - 1}$$

が任意の整数 m で整数となるのは、

$$a + b + 3 = 0$$

が必要十分。

【演習 60】

n を 2 以上の整数とすると、次の問いに答えよ。

(1) $n^3 - n$ が 6 で割り切れることを証明せよ。

(2) $n^5 - n$ が 30 で割り切れることを証明せよ。

【2005 弘前大学】

(1) $n^3 - n = (n - 1)n(n + 1)$ は連続 3 整数の積ゆえ $3! = 6$ の倍数である。

(2)

$$\begin{aligned} & (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) \\ &= n(n^2-1)(n^2-4) \\ &= n^5-5n^3+4n \end{aligned}$$

は連続5整数の積だから、 $5! = 120$ の倍数である.

$$\begin{aligned} n^5 - n &= (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) + 5n^3 - 5n \\ &= (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) + 5(n^3 - n) \end{aligned}$$

と変形して、(1)の結果を合わせると、 $n^5 - n$ は30の倍数である.

【演習61】

3以上9999以下の奇数 a で、 $a^2 - a$ が10000で割り切れるものをすべて求めよ。

【2005 東京大学】

$$a(a-1) = 10000Q = 2^4 \cdot 5^4 Q$$

a が奇数、 $a-1$ が偶数であって、しかも同時に5の倍数になることもないから、

$$\begin{aligned} a &= 5^4 M \ (M: \text{奇数}), a-1 = 2^4 \cdot N \text{ または、} \\ a &= M \ (M: \text{偶数}), a-1 = 2^4 \cdot 5^4 N \end{aligned}$$

後者の場合は

$$a = 10000N + 1 > 10001$$

となり、条件に適さず.

$$a = 5^4 M, a-1 = 2^4 N$$

のとき、 a を消去すると、

$$5^4 M - 1 = 2^4 \cdot N \Leftrightarrow 625M + 16N = 1$$

$$625 = 16 \times 39 + 1 \Leftrightarrow 625 \cdot 1 + 16 \cdot (-39) = 1$$

を利用すると、

$$625(M-1) + 16(N+39) = 0$$

と変形でき、625と16は互いに素だから、

$$N+39 = 625m$$

$$N = 625m + 39$$

$$\therefore a = 2^4 \cdot (625m + 39) + 1$$

$$= 10000m + 625$$

$a < 10000$ だから、 $a = 625$



$ax + by = c \cdots \clubsuit$ を満たす整数解 (x, y) を求めるには、定数項 c を消去して、 \clubsuit を積形にするのがポイントです。例えば、 $73x + 18y = 3 \cdots \textcircled{1}$ のとき、この式を満たす特殊な解を 1 つ求めます。73 を 18 で割ると、 $73 = 18 \times 4 + 1$ であるから、 $73 \times 3 + 18 \times (-12) = 3 \cdots \textcircled{2}$ となり、特殊な解が見つかります。① - ② より

$$73(x - 3) + 18(y + 12) = 0 \Leftrightarrow 73(x - 3) = -18(y + 12)$$

73 と 18 は互いに素だから、

$$x - 3 = -18m, y + 12 = 73m \Leftrightarrow x = 3 - 18m, y = 73m - 12$$

と一般解が得られます。

さて、特殊な解が割り算 1 回で求められましたが、いつもこううまくは行きません。そのようなときは繰り返し割り算を実行します。ユークリッドの互除法という手法で求めることができます。

【演習 62】

次の各問に答えよ。

- (1) p, q を相異なる 2 つの素数とすると、 $\log_p q$ が無理数であることを示せ。
- (2) a, b が 2 以上の整数で、 $\log_a b$ が有理数であるとする。このとき、 a の素因数、つまり a の素因数分解に現れる素数は、すべて b の素因数でもあり、逆に b の素因数はすべて a の素因数でもあることを示せ。
- (3) a, b が 2 以上の整数で、 $\log_a b$ が有理数となるとき、 a, b は何らかの正の整数 c, α, β により $a = c^\alpha, b = c^\beta$ と書けることを示せ。

【2005 お茶の水女子大学】

(1)

$$\log_p q = \frac{m}{n} \quad (m, n \text{ は互いに素で、} n \geq 1)$$

と仮定して矛盾を導けばよい。

$$p^{\frac{m}{n}} = q \Leftrightarrow p^m = q^n$$

p^m は q を約数にもつが、これは p, q が異なる素数であることに矛盾。

(2)

$$\log_a b = \frac{m}{n} \quad (m, n \text{ は互いに素で、} n \geq 1)$$

とおくと、

$$a^{\frac{m}{n}} = b \Leftrightarrow a^m = b^n$$

a のどの素因数も b の約数であるから、 a の素因数分解に現れる素数は、すべて b の素因数でもある。また、同様に b の素因数はすべて a の素因数でもある。

(3) a, b は素因数分解をしたとき、すべての素因数が一致する。いま、素因数 p 着目して、

$$a = \cdots p^K \cdots$$

$$b = \cdots p^L \cdots$$

と分解されているとすれば、

$$Km = Ln$$

ここに、 m, n は互いに素であるから、 K は n の倍数、 L は m の倍数である。

$$K = nN, L = mN$$

となる N があるので、

$$a = \cdots p^{nN} \cdots = (\cdots p^N \cdots)^n$$

$$b = \cdots p^{mN} \cdots = (\cdots p^N \cdots)^m$$

と表せる。

【演習 63】

(1) $p, 2p+1, 4p+1$ がいずれも素数であるような p をすべて求めよ。

(2) $q, 2q+1, 4q-1, 6q-1, 8q+1$ がいずれも素数であるような q をすべて求めよ。

【2005 一橋大学】

(1)

p	$3m-1$	$3m$	$3m+1$
$2p+1$	$6m-1$	$6m+1$	$6m+3$
$4p+1$	$12m-3$	$12m+1$	$12m+5$

この表より、 $p, 2p+1, 4p+1$ が素数になるのは、

(i) $12m-3 = 3(4m-1)$ が素数になるのは、

$$4m-1 = 1 \Leftrightarrow 2m = 1$$

これは不可。

(ii) $3m$ が素数になるのは、 $m=1$ であり、このとき、

$$p = 3, 2p+1 = 7, 4p+1 = 13$$

これは適する。

(iii) $6m + 3 = 3(2m + 1)$ が素数になるのは、 $m = 0$ であり、このとき、 $p = 1$ で不可.

よって、 $p = 3$ である.



$$\begin{aligned} & p(2p+1)(4p+1) \\ &= 8p^3 + 6p^2 + p \\ &= 9p^3 + 6p^2 - p^3 + p \\ &= 9p^3 + 6p^2 - (p-1)p(p+1) \end{aligned}$$

は 3 の倍数であるから、 $p, 2p+1, 4p+1$ の一つは 3 である. 適するものは $p = 3$
(2)

(i) $q = 5m$ のとき、 q が素数だから、 $m = 1$ で、このとき、

$$\begin{aligned} 2q+1 &= 10m+1 = 11 \\ 4q-1 &= 20m-1 = 19 \\ 6q-1 &= 30m-1 = 29 \\ 8q+1 &= 40m+1 = 41 \end{aligned}$$

のすべては素数になる.

(ii) $q = 5m+1$ のとき、

$$\begin{aligned} 2q+1 &= 10m+3 \\ 4q-1 &= 20m+3 \\ 6q-1 &= 30m+5 = 5(6m+1) \\ 8q+1 &= 40m+6 = 2(20m+3) \end{aligned}$$

$5(6m+1)$ が素数になるのは、 $m = 0$ のときで、 $q = 1$ となり、不可.

(iii) $q = 5m+2$ のとき $2q+1 = 10m+5 = 5(2m+1)$ が素数になるには、 $m = 0$ このとき、
 $q = 2, 2q+1 = 5, 4q-1 = 7, 6q-1 = 11, 8q+1 = 17$

これらはみな素数である.

(iv) $q = 5m+3$ のとき、 $8q+1 = 40m+25 = 5(20m+5)$ は素数ではない.

(v) $q = 5m+4$ のとき、 $4q-1 = 20m+15 = 5(4m+3)$ は素数ではない.

以上より、 $q = 2$ または、 $q = 5$ である.



$$\begin{aligned} & q(2q+1)(4q-1)(6q-1)(8q+1) \\ &= 384q^5 + 80q^4 - 60q^3 + q \\ &= 385q^5 + 80q^4 - 60q^3 - q^5 + q \end{aligned}$$

は5の倍数だから、

$$q, 2q+1, 4q-1, 6q-1, 8q-1$$

の1つだけが5である。これより $q=2, q=5$

【演習 64】

xy 平面上で次の条件 (イ), (ロ), (ハ) を満たす点 (x, y) は何個あるか, 考察の過程をていねいに説明して解答せよ。

(イ) x, y は共に整数。

(ロ) $1 \leq x \leq 100, 1 \leq y \leq 100$ 。

(ハ) $x+y$ は2の倍数, $2x+3y$ は5の倍数。

【2005 名古屋大学】

$$2x+3y=5m$$

$$\Leftrightarrow 2(x-m)=-3(y-m)$$

より、

$$\begin{cases} x-m=-3t \\ y-m=2t \end{cases}$$

このとき、

$$x+y=2m-t$$

が2の倍数になるのは、 $t=2k$ のときであるから、

$$\begin{cases} x=m-6k \\ y=m+4k \end{cases}$$

m, k の条件は、

$$1 \leq m-6k \leq 100, 1 \leq m+4k \leq 100$$

$$\Leftrightarrow 1+6k \leq m \leq 100+6k, 1-4k \leq m \leq 100-4k$$

これを満たす m があるために、

$$1+6k \leq 100-4k, 1-4k \leq 100+6k$$

$$\Leftrightarrow -\frac{99}{10} \leq k \leq \frac{99}{10}$$

(i) $-9 \leq k < 0$ のとき、

$$1-4k \leq m \leq 100+6k$$

これを満たす m は

$$100 + 6k - (1 - 4k) + 1 = 100 + 10k$$

個あるから、 k を動かして、

$$\sum_{k=-9}^{-1} (100 + 10k) = (10 + 90) \times 9 \times \frac{1}{2} = 450$$

個

(ii) $k = 0$ のとき、 $1 \leq m \leq 100$ だから、100 個

(iii) $1 \leq k \leq 9$ のとき、

$$1 + 6k \leq m \leq 100 - 4k$$

これを満たす m は

$$100 - 4k - (1 + 6k) + 1 = 100 - 10k$$

個あるから、

$$\sum_{k=1}^9 (100 - 10k) = (10 + 90) \times 9 \times \frac{1}{2} = 450$$

以上を合計して、1000 個ある。

【演習 65】

$a^3 - b^3 = 217$ を満たす整数の組 (a, b) をすべて求めよ。

【2005 京都大学】

$$a^3 - b^3 = 217$$

$$\Leftrightarrow (a - b)(a^2 + ab + b^2) = 7 \times 31$$

であり、 $a^2 + ab + b^2 > 0, a - b > 0$ であるから、

$$\rightsquigarrow \boxed{a^2 + ab + b^2 > a - b \text{ と決め込んではいられない}}$$

$$\begin{cases} a - b = 1 \\ a^2 + ab + b^2 = 217 \end{cases} \dots\dots ①$$

$$\begin{cases} a - b = 217 \\ a^2 + ab + b^2 = 1 \end{cases} \dots\dots ②$$

$$\begin{cases} a - b = 7 \\ a^2 + ab + b^2 = 31 \end{cases} \dots\dots ③$$

$$\begin{cases} a - b = 31 \\ a^2 + ab + b^2 = 7 \end{cases} \dots\dots ④$$

(i) ①のとき、

$$\begin{aligned}(b+1)^2 + b(b+1) + b^2 &= 217 \\ \Leftrightarrow 3b^2 + 3b - 216 &= 0 \\ \Leftrightarrow b^2 + b - 72 &= 0 \\ \Leftrightarrow (b+9)(b-8) &= 0 \\ \therefore (a, b) &= (-8, -9), (9, 8)\end{aligned}$$

(ii) ②のとき、

$$\begin{aligned}(b+217)^2 + b(b+217) + b^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow 3b^2 + 3 \cdot 217b + 216 \cdot 218 &= 0 \\ \Leftrightarrow b^2 + 217b + 72 \cdot 218 &= 0 \\ \text{判別式 } D &= 217^2 - 4 \cdot 72 \cdot 218 < 0\end{aligned}$$

だから、整数解をもたない。

(iii) ③のとき、

$$\begin{aligned}(b+7)^2 + b(b+7) + b^2 &= 31 \\ \Leftrightarrow 3b^2 + 3 \cdot 7b + 18 &= 0 \\ \Leftrightarrow b^2 + 7b + 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow (b+1)(b+6) &= 0 \\ \therefore (a, b) &= (6, -1), (1, -6)\end{aligned}$$

(iv) ④のとき、

$$\begin{aligned}(b+31)^2 + b(b+31) + b^2 &= 7 \\ \Leftrightarrow 3b^2 + 3 \cdot 31b + 954 &= 0 \\ \Leftrightarrow b^2 + 31b + 318 &= 0 \\ \text{判別式 } D &= 31^2 - 4 \cdot 318 < 0\end{aligned}$$

だから、整数解をもたない。

【演習 66】

自然数 n に対して、 $A(n)$ を $n^2 + 3n + 2$ の値の一の位の数字とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $j + k = 7$ を満たす j と k について、 $A(j) = A(k)$ となることを示せ。

(2) $j + k = 97$ を満たす j と k について、 $A(j) = A(k)$ となることを示せ。

(3) j を 5 の倍数とすると、任意の n について、 $A(n+j) = A(n)$ となることを示せ。

【2005 島根大学】

(1)

$$f(n) = n^2 + 3n + 2$$

のとき、 $k = 7 - j$ にたいして、

$$\begin{aligned} f(j) - f(k) &= f(j) - f(7 - j) \\ &= j^2 + 3j + 2 - (7 - j)^2 - 3(7 - j) - 2 \\ &= -70 + 20j = 10(2j - 7) \end{aligned}$$

だから、

$$A(j) = A(k)$$

(2) $k = 97 - j$ にたいして、

$$\begin{aligned} f(j) - f(k) &= f(j) - f(97 - j) \\ &= j^2 + 3j + 2 - (97 - j)^2 - 3(97 - j) - 2 \\ &= -97^2 - 3 \cdot 97 + 3j \times 2 + 2 \times 97j \\ &= -100 \cdot 97 + 100 \cdot 2j \end{aligned}$$

$$\therefore A(j) = A(k)$$

(3)

$$\begin{aligned} f(n + j) - f(n) &= \\ &= (n + j)^2 + 3(n + j) + 2 - n^2 - 3n - 2 \\ &= 2nj + j^2 + 3j \\ &= 2j(n + j + 3) \end{aligned}$$

で、 i は 5 の倍数だから、

$$A(j) = A(k)$$

【演習 67】

次の問いに答えなさい。

(1) $25m + 17n = 1623$ を満たす正の整数の組 (m, n) を 1 つ求めなさい。

(2) $25m + 17n = 1623$ を満たす正の整数の組 (m, n) をすべて求めなさい。

【2005 慶應義塾大学】

(1)

$$1623 = 25 \times 64 + 23$$

$$23 = 17 \times 1 + 6$$

だから、

$$\begin{aligned}25m + 17n &= 1623 \\ \Leftrightarrow 25(m - 64) + 17n &= 23 \\ \Leftrightarrow 25(m - 64) + 17(n - 1) &= 6 \cdots \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

と変形する。

$$\begin{aligned}25 &= 17 + 8 \\ 17 &= 8 \times 2 + 1 \\ 1 &= 17 - 8 \times 2 \\ &= 17 - (25 - 17) \times 2 \\ &= 25 \times (-2) + 17 \times 3 \\ \therefore 25 \times (-12) + 17 \times 16 &= 6\end{aligned}$$

より、 $\textcircled{1}$ の解の1つは、

$$\begin{aligned}m - 64 &= -12, n - 1 = 16 \\ \therefore m &= 52, n = 17\end{aligned}$$

(2)

$$25(m - 52) + 17(n - 17) = 0$$

で25と17は互いに素であるから、

$$\begin{aligned}m - 52 &= 17k, n - 17 = -25k \\ \therefore m &= 52 + 17k, n = 17 - 25k \ (k \in \mathbb{Z})\end{aligned}$$

【演習 68】

選択肢から最も適切なものを選びその番号を解答欄に記入しなさい。

相異なる自然数 a と b が 1 以外に共通の約数を持たないとき、 a と b は互いに素であるという。自然数 n を素数 p で割った余りを $M_p(n)$ で表すことにする。また $p-1$ 以下の自然数 x, y に対して、 $x \otimes y = M_p(xy)$ と演算 \otimes を定義する。ただし右辺の xy は通常の積である。たとえば、 $M_{11}(6 \times \boxed{(1)}) = 2$ である。この演算 \otimes は交換法則 $\boxed{(2)}\boxed{(3)}$ や結合法則 $\boxed{(4)}\boxed{(5)}$ を満たす。ここで x, y, z は $p-1$ 以下の自然数である。

次の命題はフェルマーの小定理とよばれている。

命題 自然数 a と素数 p が互いに素ならば a^{p-1} を p で割った余りは 1 である。

この命題を証明しよう。上の記号を用いれば $M_p(\boxed{(6)}) = \boxed{(7)}$ を示せばよい。以下、 M_p の添字 p は省略する。 x, y を $p-1$ 以下の自然数とする。 $M(ax) = M(ay)$ ならば $a(x-y)$ は $\boxed{(8)}\boxed{(9)}$ の $\boxed{(10)}\boxed{(11)}$ となる。よって $x = y$ でなくてはならない。この $\boxed{(12)}\boxed{(13)}$ を考えれば、 $\boxed{(14)}\boxed{(15)}$ ならば $\boxed{(16)}\boxed{(17)}$ である。このことから

$$M(1a), M(2a), \dots, M((p-1)a)$$

は異なった自然数である。よって

$$M(1a) \otimes M(2a) \otimes \dots \otimes M((p-1)a) = 1 \otimes 2 \otimes \dots \otimes \boxed{(18)}\boxed{(19)}$$

となる。一方、 M の性質を使えば

$$M(1a) \otimes M(2a) \otimes \dots \otimes M((p-1)a) = M(\boxed{(20)}) \otimes 1 \otimes 2 \otimes \dots \otimes \boxed{(21)}\boxed{(22)}$$

となる。 $x \otimes y = y$ のとき、 $x = \boxed{(23)}$ となることに注意すれば、 $M(\boxed{(6)}) = \boxed{(7)}$ を得る。

- | | | | |
|--|-----------------|------------------------|----------------------------------|
| (1) 1 | (2) 2 | (3) 3 | (4) 4 |
| (5) 0 | (6) a | (7) a^{p-1} | (8) a^p |
| (9) a^{p+1} | (10) $x - y$ | (11) $x \otimes y$ | (12) xy |
| (13) $x + y$ | (14) $x \div y$ | (15) $M(ax) = M(ay)$ | (16) $x = y$ |
| (17) $p + 1$ | (18) p | (19) $p - 1$ | (20) $M(ax) \div M(ay)$ |
| (21) 逆 | (22) 対偶 | (23) 裏 | (24) 否定 |
| (25) 矛盾 | (26) 倍数 | (27) 約数 | (28) 素数 |
| (29) 互いに素 | (30) $p - 1$ 以下 | (31) $x \otimes y = 0$ | (32) $x \otimes y = y \otimes x$ |
| (33) $x \otimes y \otimes z = y \otimes z \otimes x = z \otimes x \otimes y$ | | | |
| (34) $x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$ | | | |
| (35) $x \otimes (y + z) = x \otimes y + x \otimes z$ | | | |

【2005 慶應義塾大学】

【解答】

(1)	(2)(3)	(4)(5)	(6)	(7)	(8)(9)	(10)(11)	(12)(13)	(14)(15)	(16)(17)
4	32	34	7	1	18	26	22	14	20

(18)(19)	(20)	(21)(22)	(23)
19	7	19	1

自然数 n を素数 p で割った余りを $M_p(n)$ で表すことにする。また $p-1$ 以下の自然数 x, y に対して、 $x \otimes y = M_p(xy)$ と演算 \otimes を定義する。ただし右辺の xy は通常の積である。たとえば、 $M_{11}(6 \times \boxed{4}) = 2$ である。この演算 \otimes は交換法則 $x \otimes y = y \otimes x$ や結合法則 $x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$ を満たす。ここで x, y, z は $p-1$ 以下の自然数である。

次の命題はフェルマーの小定理とよばれている。

命題 自然数 a と素数 p が互いに素ならば a^{p-1} を p で割った余りは 1 である。

この命題を証明しよう。上の記号を用いれば $M_p(a^{p-1}) = 1$ を示せばよい。以下、 M_p の添字 p は省略する。 x, y を $p-1$ 以下の自然数とする。 $M(ax) = M(ay)$ ならば $a(x-y)$ は \boxed{p} の**倍数** となる。よって $x = y$ でなくてはならない。この**対偶** を考えれば、 $x \not\equiv y$ ならば $M(ax) \not\equiv M(ay)$ である。このことから

$$M(1a), M(2a), \dots, M((p-1)a)$$

は異なった自然数である。よって

$$M(1a) \otimes M(2a) \otimes \dots \otimes M((p-1)a) = 1 \otimes 2 \otimes \dots \otimes \boxed{p-1}$$

となる。一方、 M の性質を使えば

$$M(1a) \otimes M(2a) \otimes \dots \otimes M((p-1)a) = M(\boxed{a^{p-1}}) \otimes 1 \otimes 2 \otimes \dots \otimes \boxed{p-1}$$

となる。 $x \otimes y = y$ のとき、 $x = \boxed{1}$ となることに注意すれば、 $M_p(a^{p-1}) = 1$ を得る。

【演習 69】

素数とは、その数自身と 1 のほかに因数をもたない 2 以上の自然数である。

2 以上の自然数 n に対して、自然数 $P(n)$ を次の規則で定める。

$$\begin{cases} n \text{ が素数ならば, } P(n) = 1, \\ n \text{ が素数でないならば, } P(n) \text{ は } n \text{ を割り切る最も小さい素数。} \end{cases}$$

例えば、 $P(2) = 1, P(3) = 1, P(4) = 2, P(5) = 1, P(6) = 2$ である。

- (1) $P(a) = 5$ となる 2 以上の自然数 a のうち最小のものは $a = \boxed{\text{ア}}$ である。
- (2) 自然数 n が $2 \leq n \leq 100$ の範囲にあるとき $P(n)$ の最大値は $\boxed{\text{イ}}$ であり、 $P(b) = \boxed{\text{イ}}$ となる自然数 b は、 $2 \leq b \leq 100$ の範囲に全部で $\boxed{\text{ウ}}$ 個ある。
- (3) c を 2 以上の自然数とし自然数 n が $2 \leq n \leq c$ の範囲にあるとき、 $P(n)$ の最大値が 11 であるとする。このような c の最小値は $\boxed{\text{エ}}$ 、最大値は $\boxed{\text{オ}}$ である。

【2005 上智大学】

【解答】

ア	イ	ウ	エ	オ
25	7	3	121	168

- (1) a は素因数 5 を含む合成数で 5 を最小の素因数とする最小のものだから、 $a = 5 \times 5 = 25$

- (2) 含まれる素因数の最小なものを最大にすればよい。

$$5^2 = 25, 7^2 = 49, 11^2 = 121$$

だから、自然数 n が $2 \leq n \leq 100$ の範囲にあるとき $P(n)$ の最大値は 7 である。 $P(b) = 7$ となる自然数 b は、 $2 \leq b \leq 100$ の範囲に

$$7 \times 7 = 49, 7 \times 11 = 77, 7 \times 13 = 91$$

の 3 個ある。

- (3)

$$11 \times 11, 13 \times 13 = 169$$

だから、最小値は 121。最大値は $169 - 1 = 168$ 。

【演習 70】

方程式 $\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{3z} = \frac{4}{3}$ …… ①

を満たす正の整数の組 (x, y, z) について考える。

(1) $x = 1$ のとき、正の整数 y, z の組をすべて求めよ。

(2) x のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) 方程式①を解け。

【2005 早稲田大学 (政経)】

(1) $x = 1$ のとき、

$$1 + \frac{1}{2y} + \frac{1}{3z} = \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2y} + \frac{1}{3z} = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3z + 2y = 2yz$$

$$\Leftrightarrow 2y(z-1) - 3(z-1) = 3$$

$$\Leftrightarrow (2y-3)(z-1) = 3$$

と変形して、

$$(2y-3, z-1) = (1, 3), (3, 1)$$

$$\Leftrightarrow (y, z) = (2, 4), (3, 2)$$

(2)

$$\frac{1}{2y} \leq \frac{1}{2}, \frac{1}{3z} \leq \frac{1}{3} \text{ だから、}$$

$$\frac{4}{3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{3z} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \Leftrightarrow x \leq 2$$

$$\therefore x = 1, 2$$

(3) $x = 2$ のとき、

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{3z} = \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2y} + \frac{1}{3z} = \frac{5}{6}$$

$$\Leftrightarrow 3z + 2y = 5yz$$

$$\Leftrightarrow 25yz - 10y - 15z = 0$$

$$\Leftrightarrow 5y(5z - 2) - 3(5z - 2) = 6$$

$$\Leftrightarrow (5y - 3)(5z - 2) = 6$$

$$\Leftrightarrow (5y - 3, 5z - 2) = (1, 6), (6, 1), (-1, -6), (-6, -1)$$

$$\Leftrightarrow (5y, 5z) = (4, 8), (9, 3), (2, -4), (-3, -1)$$

これをみたす y, z はないから、求めるものは、

$$(x, y, z) = (1, 2, 4), (1, 3, 2)$$

【演習 71】

自然数 n に対して、 n 以下の自然数で n との最大公約数が 1 であるような自然数の個数を $f(n)$ とする。

例えば、 $n = 12$ に対しては、このような自然数は、1, 5, 7, 11 の 4 個なので、 $f(12) = 4$ である。また、 $f(1) = 1$ 、素数 p に対しては $f(p) = p - 1$ である。

次の問に答えよ。

(1) $f(77)$ の値を求めよ。

(2) $f(pq) = 24$ となる 2 つの素数 p, q (ただし、 $p < q$ とする) の組を求めよ。

(3) k, n を自然数とすると、 $f(2^k 3^n)$ の値を k と n の式で表せ。

【2005 早稲田大学 (社会科学)】

(1) 1 から 77 までで、7 の倍数は 11 個、11 の倍数は 7 個あるから、77 の倍数は 1 個あるから、
 $f(77) = 77 - 11 - 7 + 1 = 60$

(2) p, q が素数で、 $p < q$ のとき、

$$f(pq) = pq - p - q + 1 = (p - 1)(q - 1) = 24$$

$$(p - 1, q - 1) = (1, 24), (2, 12), (3, 8), (4, 6)$$

$$\therefore (p, q) = (3, 13), (5, 7)$$

(3) 1 から $2^k 3^n$ までで、2 の倍数は $2^{k-1} 3^n$ 個、3 の倍数は $2^k 3^{n-1}$ 個あり、6 の倍数は $2^{k-1} 3^{n-1}$ 個あるから、

$$f(2^k 3^n) = 2^k 3^n - 2^{k-1} 3^n - 2^k 3^{n-1} + 2^{k-1} 3^{n-1}$$

$$= 2^{k-1} 3^{n-1} (6 - 3 - 2 + 1) = 2^k 3^{n-1}$$



ここで定義されている f はオイラーの関数と呼ばれる整数論の関数である。普通は、

$$\varphi(n)$$

で表される。これは

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots, \frac{n}{n}$$

の中の既約分数の個数とも考えられる。この $\varphi(n)$ については次の定理が成り立つ。

(i) p を素数とするとき、

$$\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^k \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

(ii) a, b が互いに素であるとき、

$$\varphi(ab) = \varphi(a) \varphi(b)$$

(iii) a が

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdots p_m^{\alpha_m}$$

と素因数分解されるとき、

$$\varphi(a) = a \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \left(1 - \frac{1}{p_3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_m}\right)$$

【演習 72】

n を正の整数とする。実数 x, y, z に対する方程式

$$x^n + y^n + z^n = xyz \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

を考える。

(1) $n = 1$ のとき、 $\textcircled{1}$ を満たす正の整数の組 (x, y, z) で、 $x \leq y \leq z$ となるものをすべて求めよ。

(2) $n = 3$ のとき、 $\textcircled{1}$ を満たす正の実数の組 (x, y, z) は存在しないことを示せ。

【2006 東京大学】

(1)

$$\begin{cases} x + y + z = xyz \\ 0 < x \leq y \leq z \end{cases}$$

のとき、

$$1 = \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \leq \frac{1}{x^2} \times 3$$

$$x^2 \leq 3$$

$$\therefore x = 1$$

$$1 + y + z = yz$$

$$(y-1)(z-1) = 2$$

$$(y-1, z-1) = (1, 2)$$

$$\therefore y = 2, z = 3$$

(2)

$$x^3 + y^3 + z^3 = xyz$$

を満たす正の実数 x, y, z が存在すると仮定する。相加平均・相乗平均より、

$$\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \geq \sqrt[3]{x^3 \cdot y^3 \cdot z^3} = xyz$$

$$\frac{xyz}{3} \geq xyz$$

$$\therefore xyz \leq 0$$

これは矛盾。よって、

$$x^3 + y^3 + z^3 = xyz$$

を満たす正の実数 x, y, z が存在しない。

理系ではこう出る

次の条件を満たす組 (x, y, z) を考える。

条件 (A) : x, y, z は正の整数で、 $x^2 + y^2 + z^2 = xyz$ および $x \leq y \leq z$ を満たす。

以下の問いに答えよ。

- (1) 条件 (A) を満たす組 (x, y, z) で、 $y \leq 3$ となるものをすべて求めよ。
- (2) 組 (a, b, c) が条件 (A) を満たすとする。このとき、組 (b, c, z) が条件 (A) を満たすような z が存在することを示せ。
- (3) 条件 (A) を満たす組 (x, y, z) は、無数に存在することを示せ。

【2006 東京大学】

(1)

$$x^2 + y^2 + z^2 = xyz$$

$$\Leftrightarrow z^2 - xyz + (x^2 + y^2) = 0$$

を満たす実数 z が存在するために、

$$\text{判別式} : D = (xy)^2 - 4(x^2 + y^2) \geq 0$$

$$1 \geq \frac{4}{x^2} + \frac{4}{y^2} \geq \frac{4}{y^2} + \frac{4}{y^2} (\because x \leq y)$$

$$y^2 \geq 8$$

$$\therefore y \geq 3$$

いま、 $y \geq 3$ だから、 $y = 3$ である。このとき、

$$D = (3x)^2 - 4(x^2 + 3^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 \geq 36$$

これと、 $x \leq 3$ を同時に満たす x は $x = 3$ である。

$$9 + 9 + z^2 = 9z$$

$$(z - 3)(z - 6) = 0$$

$$\therefore z = 3, z = 6$$

$$\therefore (x, y, z) = (3, 3, 3), (3, 3, 6)$$

(2) $a^2 + b^2 + c^2 = abc$, $a \leq b \leq c$ のとき、 $z^2 - bcz + b^2 + c^2 = 0$ の判別式は、

$$D = b^2c^2 - 4(b^2 + c^2)$$

$$= b^2c^2 - 4(abc - a^2)$$

$$= (bc - 2a)^2$$

だから、

$$z = \frac{bc \pm (bc - 2a)}{2} = bc - a, a$$

ここに、

$$bc - a - c = c(b - 1) - a \geq 3c - a > 0$$

だから、確かに、

$$b^2 + c^2 + z^2 = zbc, b \leq c \leq z$$

を満たす z が存在する。

(3) (2) より、

$$\begin{cases} a_1 = 3, b_1 = 3, c_1 = 3 \\ a_{n+1} = b_n, b_{n+1} = c_n, c_{n+1} = b_n c_n - a_n \end{cases}$$

と数列 $\{(a_n, b_n, c_n)\}_{(n=1,2,3,\dots)}$ はすべて、

$$a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 = a_n b_n c_n, a_n \leq b_n \leq c_n$$

を満たす。そして、

$$c_{n+1} = b_n c_n - a_n \geq c_n + 2c_n - a_n > c_n$$

だから、この数列の各項はすべて異なる。よって、条件 (A) を満たす組 (x, y, z) は、無数に存在する

【演習 73】

自然数 a, b, c が

$$3a = b^3, \quad 5a = c^2$$

を満たし、 d^6 が a を割り切るような自然数 d は $d = 1$ に限るとする。

- (1) a は 3 と 5 で割り切れることを示せ。
- (2) a の素因数は 3 と 5 以外にないことを示せ。
- (3) a を求めよ。

【2006 東京工業大学】

(1)

$$3a = b^3, 5a = c^2$$

のとき、 b^3 は素因数 3 をもつから、 b は 3 の倍数。

c^2 は素因数 5 をもつから、 c は 5 の倍数。 $b = 3b', c = 5c'$ とおくと、

$$a = 3^2 b'^3 = 5c'^2 \dots\dots ①$$

よって、 a は 3 と 5 で割り切れる。

(2)

(3) ①より、

$$b' = 5b'', c' = 3c''$$

とおけるので、

$$a = 3^2 \cdot 5^3 b''^3 = 5 \cdot 3^2 c''^2$$

そこで、あらためて、

$$a = 3^2 \cdot 5^3 A$$

とおく。

$$3^3 \cdot 5^3 A = b^3, 3^2 \cdot 5^4 A = c^2$$

だから、 A は平方数かつ立方数である。 $A = d^6$ とおくことができるから、

$$a = 3^2 \cdot 5^3 d^6$$

仮定より、 $d = 1$

$$\therefore a = 3^2 \cdot 5^3 = 1125$$



上の解答は (2)、(3) を同時に解いたが、(2) を示すとすれば、次のようになる。

a の 3, 5 以外の素因数が存在してそれが p でその個数が l 個、 b も p を因数にもち、その個数が m 個、 c も p を因数にもち、その個数が n 個であるとする、

$$l = 3m = 2n$$

よって、 $l = 6k$ とおけて、

$$a = Ap^{6k} = A(p^k)^6$$

となる。よって、 $p^k = 1$ となる。これは矛盾。

ゆえに a の 3, 5 以外の素因数は存在せず。

続いて、(3) は

$$a = 3^i \cdot 5^j$$

とおくと、

$$3^{i+1} \cdot 5^j = b^3, 3^i \cdot 5^{j+1} = c^2$$

より、

$$i + 1 = 3m, i = 2n \dots \dots \textcircled{1}$$

$$j = 3m', j + 1 = 2n' \dots \dots \textcircled{2}$$

①より、

$$3m - 2n = 1 \Leftrightarrow 3(m - 1) - 2(n - 1) = 0$$

$$\therefore m - 1 = 2k, n - 1 = 3k$$

$$i = 3(2k + 1) - 1 = 6k + 2$$

同様に、②より、

$$j = 6k' + 3$$

$$\therefore a = 2^2 \cdot 5^3 (2^k \cdot 5^{k'})^6$$

$$2^k \cdot 5^{k'} = 1$$

であるから、

$$a = 3^2 \cdot 5^3 = 1125$$

【演習 74】

次の条件 (a), (b) をともにみたす直角三角形を考える。ただし、斜辺の長さを p , その他の 2 辺の長さを q, r とする。

(a) p, q, r は自然数で、そのうちの少なくとも 2 つは素数である。

(b) $p + q + r = 132$

(1) q, r のどちらかは偶数であることを示せ。

(2) p, q, r の組をすべて求めよ。

【2006 一橋大学】

(1) n を整数とすると、

(i) $n = 2N$ ならば、 $n^2 = 4N^2$

(ii) $n = 2N + 1$ ならば、 $n^2 = 4(N^2 + N) + 1$

であるから、整数の平方が 4 で割って 2 余ることはない……(★)

いま、 q, r のどちらも奇数とすると

$$\begin{aligned} q^2 + r^2 &= (2Q + 1)^2 + (2R + 1)^2 \\ &= 4(Q^2 + R^2 + Q + R) + 2 \end{aligned}$$

これは、 p が 4 で割って 2 余ることになって、(★) に矛盾する。よって、 q, r のどちらかは偶数である。

(2) q, r の 1 つは奇数で、もう 1 つは偶数であるから、 q を奇数、 r を偶数としてもよい。 p, q, r は自然数で、そのうちの少なくとも 2 つは素数であるから、 q, r の少なくとも 1 つは素数である。 r が素数であるとする、 $r = 2$ である。

$$\begin{aligned} p^2 &= q^2 + 4 \\ \Leftrightarrow (p - q)(p + q) &= 4 \\ \Leftrightarrow p - q = 1, p + q &= 4 \\ \Leftrightarrow 2p = 5, 2q &= 3 \end{aligned}$$

これは不適. 従って、 p, q が素数である.

$$p^2 = q^2 + r^2$$

$$\Leftrightarrow (p-r)(p+r) = q^2$$

と変形して、 $1 \leq p-r < p+r$ であるから、

$$p+r = q^2, p-r = 1$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{1}{2}(q^2 + 1), r = \frac{1}{2}(q^2 - 1)$$

これを、 $p+q+r = 132$ に代入して、

$$\frac{1}{2}(q^2 + 1) + \frac{1}{2}(q^2 - 1) + q = 132$$

$$\Leftrightarrow q^2 + q - 132 = 0$$

$$\Leftrightarrow (q-11)(q+12) = 0$$

q は素数だから、 $q = 11$

$$r = \frac{1}{2}(11^2 - 1) = 60, p = 60 + 1 = 61$$



$p^2 = q^2 + r^2$ を満たす整数解をピタゴラス数といい、このような、 p, q, r の解は

$$p = m^2 + n^2, q = m^2 - n^2, r = 2mn$$

であることが知られている.

このとき、 r が素数ならば、 $m = n = 1$ となって、 $q = 0$ で不適. したがって、 p, q が素数である.

$q = (m+n)(m-n)$ が素数だから、 $m-n = 1$ である. $m = n+1$ より、

$$p = (n+1)^2 + n^2, q = (n+1)^2 - n^2, r = 2n(n+1)$$

$p+q+r = 132$ 、だから

$$2(n+1)^2 + 2n(n+1) = 132$$

$$2n^2 + 3n - 65 = 0$$

$$(n-5)(2n+13) = 0$$

$$\therefore n = 5$$

【演習 75】

2 以上の自然数 n に対し、 n と $n^2 + 2$ がともに素数になるのは $n = 3$ の場合に限ることを示せ。

【2006 京都大学】

$$\begin{aligned} n(n^2 + 2) &= n(n^2 - 1) + 3n \\ &= (n-1)n(n+1) + 3n \end{aligned}$$

は3の倍数である。 $n^2 + 2 \geq 8$ であるから $n = 3$ である。

【演習 76】

二つの自然数が互いに素であるとは、二つの自然数の最大公約数が1であることをいう。三つの自然数が互いに素であるとは、三つの自然数からどの二つの自然数を選んでも、その選んだ二つの自然数が互いに素になることをいう。

このとき、次の問に答えよ。

- (1) 任意の自然数 k に対して、連続する二つの自然数 k と $k + 1$ は互いに素であることを示せ。
- (2) n を3以上の奇数とする。 n^2 は奇数であるから、ある自然数 k があって、 $n^2 = 2k + 1$ と表せる。このとき、三つの自然数 $n, k, k + 1$ は互いに素であることを示せ。
- (3) 三つの互いに素な自然数を三辺の長さとする直角三角形は無数にあることを示せ。

【2006 大阪教育大学】

(1) $k, k + 1$ の最大公約数を g とすると、 g は $k + 1 - k = 1$ の約数でもあるから、 $g = 1$ である。

(2)

$$n = 2m + 1$$

とおくと、

$$n^2 = 2(2m^2 + 2m) + 1$$

だから、

$$k = 2m^2 + 2m$$

$$k + 1 = 2m^2 + 2m + 1$$

$k, k + 1$ は (1) より互いに素である。

$$(2m^2 + 2m) - m(2m + 1) = m \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$(2m + 1) - 2(m) = 1 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$k = 2m^2 + 2m$ と $n = 2m + 1$ の最大公約数を g_1 とおくと、①より、 g_1 は m の約数であり、さらに②より、 g_1 は1の約数である。よって、 $g_1 = 1$

全く同様に、次の2式：

$$(2m^2 + 2m + 1) - m(2m + 1) = m + 1$$

$$2(m + 1) - (2m + 1) = 1$$

より、 n と $k + 1$ も互いに素である。

(3)

$$(k+1)^2 - k^2 = 2k+1 = n^2$$

よって、任意の奇数 n に対して、(2) のように $k, k+1$ を定めると $n, k, k+1$ は互いに素で、直下3角形の3辺となる。このような組は n が任意だから無数に存在する。

【演習 77】

整数 p, q, r, α, β に対し、次のような x, y についての連立1次方程式を考える。

$$\begin{cases} x + py = \alpha \\ qx + ry = \beta \end{cases}$$

以下では、 $r - pq \neq 0$ とする。

- (1) 解 x, y を p, q, r, α, β を用いて表しなさい。解答欄には答だけを書きなさい。
- (2) 整数 p, q, r に関する条件 $|r - pq| = 1$ は、任意の整数 α, β に対し解 x, y が整数であるための必要十分条件であることを証明しなさい。
- (3) $|r - pq| = 1$ のとき、 $(\alpha, \beta) = (1, 2)$ に対する解の x の値が2となるような整数の組 (p, q, r) をすべて求めなさい。

【2006 慶應義塾大学（理工）】

(1)

$$\begin{cases} x + py = \alpha \cdots \cdots \textcircled{1} \\ qx + ry = \beta \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow x = \alpha - py$$

を②に代入して、

$$q(\alpha - py) + ry = \beta$$

$$(r - pq)y = \beta - q\alpha$$

$$\therefore y = \frac{\beta - q\alpha}{r - pq}$$

$$\therefore x = \alpha - p \frac{\beta - q\alpha}{r - pq}$$

$$= \frac{\alpha r - p\beta}{r - pq}$$

(2) $\alpha = 0, \beta = 1$ とおくと、

$$y = \frac{1}{r - pq}$$

この y が整数であるためには

$$|r - pq| = 1$$

が必要である。逆にこのとき、任意の整数 α, β に対して、

$$x = \pm(\alpha r - p\beta), y = \pm(\beta - q\alpha)$$

は確かに整数となる。

(3)

$$r - pq = \pm 1$$

で、 $\alpha = 1, \beta = 2$ のとき、

$$x = \pm(r - 2p), y = \pm(2 - q) \text{ (複号同順)}$$

であるが、 $x = 2$ となるのは、

$$r - 2p = \pm 2$$

$r - pq = 1$ のとき、 $r - 2p = 2$ だから

$$2p + 2 - pq = 1$$

$$p(2 - q) = -1$$

$$(p, 2 - q) = (-1, 1), (1, -1)$$

$$(p, q) = (-1, 1), (1, 3)$$

$$(p, q, r) = (-1, 1, 0), (1, 3, 4)$$

$r - pq = -1$ のとき、 $r - 2p = -2$ だから

$$2p - 2 - pq = -1$$

$$p(2 - q) = 1$$

$$(p, 2 - q) = (1, 1), (-1, -1)$$

$$(p, q) = (1, 1), (-1, 3)$$

$$(p, q, r) = (1, 1, 0), (-1, 3, -4)$$

【演習 78】

$2 \leq p < q < r$ を満たす整数 p, q, r の組で

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq 1$$

となるものをすべて求めよ。

【2010 群馬大学】

$$2 \leq p < q < r$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq 1$$

のとき、

$$\frac{1}{p} > \frac{1}{q} > \frac{1}{r}$$

だから、

$$\frac{3}{p} > \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq 1$$

$$3 > p$$

$$\therefore p = 2$$

つづいて、

$$\frac{2}{q} > \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq \frac{1}{2}$$

$$4 > q (> 2)$$

$$\therefore q = 3$$

$$\frac{1}{r} \geq \frac{1}{6}$$

$$\therefore 6 \geq r$$

$$\therefore r = 4, 5, 6$$

【演習 79】

直角三角形 ABC は、 $\angle C$ が直角で、各辺の長さは整数であるとする。辺 BC の長さは 3 以上の素数 p であるとき、以下の問いに答えよ。

(1) 辺 AB, CA の長さを p を用いて表せ。

(2) $\tan \angle A$ と $\tan \angle B$ は、いずれも整数とならないことを示せ。

【千葉大学】

解答

(1) $AB=x, CA=y$ とおくと、

$$x^2 = y^2 + p^2$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x+y) = p^2$$

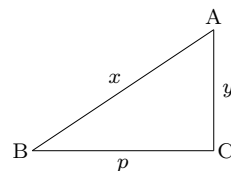
p は素数で、 x, y は正の整数だから、

$$x+y = p^2, x-y = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{p^2+1}{2}, y = \frac{p^2-1}{2}$$

(2)

$$\tan A = \frac{p}{y} = \frac{2p}{p^2-1} = \frac{2p}{(p-1)(p+1)}$$



この分母は4の倍数であるが、分子は4で割れない偶数であるから、 $\tan A$ は整数ではない.

$$\tan B = \frac{y}{p} = \frac{p^2 - 1}{2p} = \frac{(p-1)(p+1)}{2p}$$

分子は素因数 p をもたないから、 $\tan B$ は整数ではない.

◀ 3 以上の素数は奇数である.

◀ p と $p+1$ は互いに素である.

【演習 80】

以下の問いに答えよ。

(1) $3^n = k^3 + 1$ をみたす正の整数の組 (k, n) をすべて求めよ。

(2) $3^n = k^2 - 40$ をみたす正の整数の組 (k, n) をすべて求めよ。

【2010 千葉大学】

(1)

$$3^n = k^3 + 1$$

$$\Leftrightarrow 3^n = (k+1)(k^2 - k + 1)$$

より、

$$k+1 = 3^p$$

$$k^2 - k + 1 = 3^q$$

となる、整数 p, q があるが、 $k \geq 1$ だから、 $p \geq 1$ であり、したがって、 $k \geq 2$ となり、 $q \geq 1$ となる。上の2式より、 k を消去すれば、

$$(3^p - 2)(3^p - 1) + 1 = 3^q$$

$$3^{2p} - 3 \cdot 3^p + 3 = 3^q$$

$$3^{2p-1} - 3^p + 1 = 3^{q-1}$$

この左辺は3で割ると1余る整数だから、 $q = 1$ であり、このとき、

$$k^2 - k - 2 = 0$$

$$(k-2)(k+1) = 0$$

$$\therefore k = 2$$

$$3^n = k^3 + 1 = 9$$

$$\therefore n = 2$$

(2)

$$3^n = k^2 - 40$$

のとき、 k は偶数ではなく 3 の倍数でもないから、 $k = 6m \pm 1$ とおける.

$$\begin{aligned} 3^n &= (6m \pm 1)^2 - 40 \\ &= 36m^2 \pm 12m - 39 \\ \Leftrightarrow 3^{n-1} &= 12m^2 \pm 4m - 13 \\ &= 4(3m^2 \pm m - 3) - 1 \end{aligned}$$

ここに、

$$3^{n-1} = (4-1)^{n-1} = 4M + (-1)^{n-1}$$

とかけるから、 $n-1$ は奇数であり、 n は偶数である. そこで、あらためて、 $n = 2N$ とおくと、

$$\begin{aligned} (3^N)^2 &= k^2 - 40 \\ \Leftrightarrow (k - 3^N)(k + 3^N) &= 40 \end{aligned}$$

$k - 3^N, k + 3^N$ はともに偶数だから、

$$\begin{aligned} (k - 3^N, k + 3^N) &= (2, 20), (4, 10) \\ \Leftrightarrow (k, 3^N) &= (11, 9), (7, 3) \\ \Leftrightarrow (k, n) &= (11, 4), (7, 2) \end{aligned}$$

【演習 81】

m, n を 3 以上の整数とする。等式

$$\left(\frac{n}{m} - \frac{n}{2} + 1\right)\ell = 2$$

を満たす ℓ, m, n の組をすべて求めよ。

【2010 大阪大学】

$$\left(\frac{n}{m} - \frac{n}{2} + 1\right)\ell = 2 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m}\right)n = \frac{2}{\ell}$$

$m \geq 3$ だから、

$$\frac{1}{6} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{m} < \frac{1}{2}$$

$$\therefore 0 < \frac{2}{\ell} = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m}\right)n \leq 1 - \frac{1}{6}n$$

$$\therefore n \leq 6$$

(i) $n = 3$ のとき、

$$\begin{aligned}\left(\frac{3}{m} - \frac{3}{2} + 1\right)l &= 2 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{m} - \frac{1}{2}\right)l = 2 \\ \Leftrightarrow 6l - ml &= 4m \\ \Leftrightarrow ml - 6l + 4m &= 0 \\ \Leftrightarrow (m - 6)(l + 4) &= -24 \\ \Leftrightarrow (l + 4, m - 6) &= (8, -3), (12, -2), (24, -1) \\ \Leftrightarrow (l, m) &\Leftrightarrow (4, 3), (8, 4), (20, 5)\end{aligned}$$

(ii) $n = 4$ のとき、

$$\begin{aligned}\left(\frac{4}{m} - \frac{4}{2} + 1\right)l &= 2 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{m} - 1\right)l = 2 \\ \Leftrightarrow 4l - ml &= 2m \\ \Leftrightarrow ml - 4l + 2m &= 0 \\ \Leftrightarrow (m - 4)(l + 2) &= -8 \\ \Leftrightarrow (l + 2, m - 4) &= (8, -1) \\ \Leftrightarrow (l, m) &\Leftrightarrow (6, 3)\end{aligned}$$

(iii) $n = 5$ のとき、

$$\begin{aligned}\left(\frac{5}{m} - \frac{5}{2} + 1\right)l &= 2 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{m} - \frac{3}{2}\right)l = 2 \\ \Leftrightarrow 10l - 3ml &= 4m \\ \Leftrightarrow 3ml - 10l + 4m &= 0 \\ \Leftrightarrow 9ml - 30l + 12m &= 0 \\ \Leftrightarrow (3m - 10)(3l + 4) &= -40 \\ \Leftrightarrow (3l + 4, 3m - 10) &= (40, -1) \\ \Leftrightarrow (l, m) &\Leftrightarrow (12, 3)\end{aligned}$$

(iv) $n = 6$ のとき、

$$\begin{aligned}\left(\frac{6}{m} - \frac{6}{2} + 1\right)l &= 2 \Leftrightarrow \left(\frac{6}{m} - 2\right)l = 2 \\ \Leftrightarrow 3l - ml &= m \\ \Leftrightarrow ml - 3l + m &= 0 \\ \Leftrightarrow (m - 3)(l + 1) &= -3\end{aligned}$$

$l + 1 \geq 4$ だからこれを満たす解はない.

【演習 82】

a, b を自然数とする。以下の間に答えよ。

- (1) ab が 3 の倍数であるとき、 a または b は 3 の倍数であることを示せ。
- (2) $a + b$ と ab がともに 3 の倍数であるとき、 a と b はともに 3 の倍数であることを示せ。
- (3) $a + b$ と $a^2 + b^2$ がともに 3 の倍数であるとき、 a と b はともに 3 の倍数であることを示せ。

【2010 神戸大学】

- (1) a, b ともに 3 の倍数でないとする、 ab は 3 の倍数ではない。これの対偶をとれば、 ab が 3 の倍数であるとき、 a または b は 3 の倍数である。
- (2) ab が 3 の倍数であるとき、 a または b は 3 の倍数であるが、 $a + b$ も 3 の倍数だから、 a と b はともに 3 の倍数である。
- (3)

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$$

より、 $2ab$ は 3 の倍数であるが、2 と 3 は互いに素であるから、 ab は 3 の倍数である。

よって、 a と b はともに 3 の倍数である。

【演習 83】

自然数 n が $n = p^2q$ (p, q は素数, $p \neq q$) の形で表されるとき, n の正の約数は 6 個あり, それらの和は

$$\left(\boxed{\text{ア}} + p + p^2\right) \left(\boxed{\text{イ}} + q\right)$$

と表すことができる。このような n で正の約数の和が $2n$ となるような数を求める。正の約数の和が $2n$ であるから,

$$2p^2q = \left(\boxed{\text{ア}} + p + p^2\right) \left(\boxed{\text{イ}} + q\right)$$

が成り立つ。 $\boxed{\text{ア}} + p + p^2$ は奇数であり, p の倍数ではないから, $\boxed{\text{イ}} + q$ は $2p^2$ の倍数となり,

$$\boxed{\text{イ}} + q = 2p2^k \quad (k \text{ は自然数})$$

とおける。したがって,

$$q = \left(\boxed{\text{ア}} + p + p^2\right) k$$

となるが, q は素数であるから, $k = \boxed{\text{ウ}}$ である。よって

$$p^2 - p - \boxed{\text{エ}} = 0$$

これを解いて, $p = \boxed{\text{オ}}$ である。ゆえに $n = \boxed{\text{カキ}}$ である。

【2010 早稲田大学】

【解答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カキ
1	1	1	2	2	28

自然数 n が $n = p^2q$ (p, q は素数, $p \neq q$) の形で表されるとき, n の正の約数は 6 個あり, それらの和は

$$\begin{aligned} & 1 + p + p^2 + q + qp + qp^2 \\ &= (1 + p + p^2) (1 + q) \end{aligned}$$

と表すことができる。このような n で正の約数の和が $2n$ となるような数を求める。正の約数の和が $2n$ であるから,

$$2p^2q = (1 + p + p^2) (1 + q)$$

が成り立つ。 $1 + p + p^2 = 1 + p(p + 1)$ は奇数であり, p の倍数ではないから, $1 + q$ は $2p^2$ の倍数となり,

$$1 + q = 2p2^k \quad (k \text{ は自然数})$$

とおける。したがって、

$$q = (1 + p + p^2)k$$

となるが、 q は素数であるから、 $k = 1$ である。よって

$$p^2 - p - 2 = 0$$

これを解いて、 $p = 2$ である。ゆえに $n=28$ である。

【演習 84】

自然数 a, b, c, d は

$$c = 4a + 7b, \quad d = 3a + 4b$$

を満たしているものとする。

(1) $c + 3d$ が 5 の倍数ならば $2a + b$ も 5 の倍数であることを示せ。

(2) a と b が互いに素で、 c と d がどちらも素数 p の倍数ならば、 $p = 5$ であることを示せ。
ただし、2 つの自然数が互いに素とは、1 以外の正の公約数をもたないことをいう。

【2009 千葉大学】

(1)

$$\begin{cases} c = 4a + 7b \\ d = 3a + 4b \end{cases}$$

のとき、

$$c + 3d = 13a + 19b = 15a + 20b - (2a + b)$$

より、 $c + 3d$ が 5 の倍数ならば $2a + b$ も 5 の倍数である。

(2)

$$5a = -4c + 7d$$

$$5b = 3c - 4d$$

であるから、 c と d がどちらも素数 p の倍数のとき、 p は $5a, 5b$ の公約数になるが、 a と b が互いに素だから、 $5a, 5b$ の最大公約数は 5 である。 p は 5 の約数になるから、 $p = 5$ である。

【演習 85】

x, y を正の整数とする。

(1) $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$ をみたす組 (x, y) をすべて求めよ。

(2) p を 3 以上の素数とする。 $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p}$ をみたす組 (x, y) のうち、 $2x + 3y$ を最小にする (x, y) を求めよ。

【2009 名古屋大学】

(1)

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 8y + 4x = xy$$

$$\Leftrightarrow (x - 8)(y - 4) = 32$$

$$x - 8 \geq -7, y - 4 \geq -3$$

だから、

$$(x - 8, y - 4) = (1, 32), (2, 16), (4, 8), (8, 4), (16, 2), (32, 1)$$

$$\therefore (x, y) = (9, 36), (10, 20), (12, 12), (16, 8), (24, 6), (40, 5)$$

(2)

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p}$$

$$\Leftrightarrow 2py + px = xy$$

$$\Leftrightarrow (x - 2p)(y - p) = 2p^2$$

$$(x - 2p, y - p) = (1, 2p^2), (2, p^2), (p, 2p), (2p, p), (p^2, 2), (2p^2, 1)$$

$$\therefore (x, y) = (1 + 2p, p + 2p^2), (2 + 2p, p + p^2), (3p, 3p), (4p, 2p), (p^2 + 2p, p + 2), (2p^2 + 2p, p + 1)$$

これらの各場合で $2x + 3y$ を計算すると、

$$A = 6p^2 + 7p + 2$$

$$B = 3p^2 + 7p + 4$$

$$C = 15p$$

$$D = 14p$$

$$E = 2p^2 + 7p + 6$$

$$F = 4p^2 + 7p + 3$$

$p \geq 3$ では、明らかに、

$$A > F > B > E$$

$$C > D$$

$$\begin{aligned} E - D &= 2p^2 + 7p + 6 - 14p \\ &= 2p^2 - 7p + 6 \geq 2 \cdot 3^2 - 7 \cdot 3 + 6 > 0 \end{aligned}$$

だから、求めるものは

$$(x, y) = (4p, 2p)$$

【演習 86】

p を素数, n を正の整数とすると, $(p^n)!$ は p で何回割り切れるか。【2009 京都大学】

$$\begin{aligned} &\left[\frac{p^n}{p} \right] + \left[\frac{p^n}{p^2} \right] + \cdots + \left[\frac{p^n}{p^n} \right] \\ &= p^{n-1} + p^{n-2} + \cdots + 1 = \frac{p^n - 1}{p - 1} \end{aligned}$$



$n!$ の中に含まれる素因数 p の個数は、

$$\left[\frac{n}{p} \right] + \left[\frac{n}{p^2} \right] + \cdots + \left[\frac{n}{p^n} \right] + \cdots$$

個である。

【演習 87】

a と b を互いに素, すなわち 1 以外の公約数を持たない正の整数とし, さらに a は奇数とする。正の整数 n に対して整数 a_n, b_n を $(a + b\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ をみたすように定めるとき, 次の (1), (2) を示せ。ただし $\sqrt{2}$ が無理数であることは証明なしに用いてよい。

- (1) a_2 は奇数であり, a_2 と b_2 は互いに素である。
- (2) すべての n に対して, a_n は奇数であり, a_n と b_n は互いに素である。

【2009 京都大学】

(1)

$$(a + b\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$$

と定めると、

$$\begin{aligned} (a + b\sqrt{2})^{n+1} &= (a + b\sqrt{2})(a_n + b_n\sqrt{2})^n \\ a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{2} &= (a + b\sqrt{2})(a_n + b_n\sqrt{2}) \\ &= a \cdot a_n + 2b \cdot b_n + (b \cdot a_n + a \cdot b_n)\sqrt{2} \end{aligned}$$

$a, b, a_n, b_n, a_{n+1}, b_{n+1}$ は整数であるから、

$$\begin{cases} a_{n+1} = a \cdot a_n + 2b \cdot b_n \\ b_{n+1} = b \cdot a_n + a \cdot b_n \end{cases}$$

$$a_2 = a^2 + 2b^2$$

$$b_2 = 2ab$$

であり、 a は奇数だから、 a_2 は奇数である。 a_2, b_2 の最大公約数を g とすると g は奇数であり、 $b_2 = 2ab$ より、 a, b のいずれか一方だけの約数である。このとき、 $a_2 = a^2 + 2b^2$ は g を約数にもたない。よって、 a_2, b_2 は互いに素である。

(2) a_k を奇数と仮定すると、

$$a_{k+1} = a \cdot a_k + 2b \cdot b_k$$

より a_{k+1} も奇数である。 $a_1 = a$ は奇数であったから、数学的帰納法により a_n はつねに奇数である。

つぎに、

$$\begin{aligned} (a + b\sqrt{2})^{2m} &= (a + b\sqrt{2})^m (a + b\sqrt{2})^m \\ a_{2m} + b_{2m}\sqrt{2} &= (a_m + b_m\sqrt{2})^2 = a_m^2 + 2b_m^2 + 2a_mb_m\sqrt{2} \\ \begin{cases} a_{2m} = a_m^2 + 2b_m^2 \\ b_{2m} = 2a_mb_m \end{cases} \end{aligned}$$

が成り立つから、(1) の議論と同様に、次のことが成り立つ。

$$a_m \text{ は奇数}, a_m, b_m \text{ は互いに素} \Rightarrow a_{2m} \text{ は奇数}, a_{2m}, b_{2m} \text{ は互いに素}$$

a_2 は奇数、 a_2, b_2 は互いに素であったから、数学的帰納法により、

$$a_{2^n} \text{ は奇数}, a_{2^n}, b_{2^n} \text{ は互いに素}$$

いま、ある N で a_N, b_N は互いに素でないと仮定し、その公約数を g とすると、 a_{N+1}, b_{N+1} も公約数 g をもちこれを繰り返して、 $n \geq N$ のとき、 a_n, b_n は互いに素でないことになる。ところが、どんな N も

$$2^m \leq N < 2^{m+1}$$

なる m が存在するので、矛盾する。よって、示せた。

【演習 88】

- (1) x, y, z, a を正の整数とすると、

$$175x = 1323y = 5832z = a^2$$

を満たす最小の a の値を求めなさい。

- (2) $\frac{m}{175}, \frac{m^2}{1323}, \frac{m^3}{5832}$ がすべて整数となるような正の整数 m のうち、最小のものを求めなさい。

【2009 東京理科大学】

- (1)

$$175x = 1323y = 5832z = a^2$$

のとき、

$$175 = 5^2 \cdot 7, 1323 = 3^3 \cdot 7^2, 5832 = 2^3 \cdot 3^6$$

であるから、

$$x = 7X^2, y = 3Y^2, z = 2Z^2$$

と表せる。

$$\therefore a = 5 \cdot 7X = 3^2 \cdot 7Y = 2^2 \cdot 3^3 Z$$

a は素因数、

$$2^2, 3^3, 5, 7$$

をもつから、最小の a は

$$a = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7 = 3780$$

- (2)

$$\frac{m}{175} = \frac{m}{5^2 \cdot 7}, \frac{m^2}{1323} = \frac{m^2}{3^3 \cdot 7^2}, \frac{m^3}{5832} = \frac{m^3}{2^3 \cdot 3^6}$$

が整数となるには、 m は $5^2 \cdot 7$ の倍数で、 $3^2 \cdot 7$ の倍数で $2 \cdot 3^2$ の倍数である。これらの最小公倍数は

$$2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 3150$$

【演習 89】

(1) 自然数 x, y は, $1 < x < y$ および

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) = \frac{5}{3}$$

をみたす。 x, y の組をすべて求めよ。

(2) 自然数 x, y, z は, $1 < x < y < z$ および

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right) = \frac{12}{5}$$

をみたす。 x, y, z の組をすべて求めよ。

【2011 一橋大学】

(1)

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) = \frac{5}{3} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{xy} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3} \\ \Leftrightarrow & 3 + 3y + 3x = 2xy \\ \Leftrightarrow & \left(x - \frac{3}{2}\right)\left(y - \frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} + \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow & (2x - 3)(2y - 3) = 15 \\ & -1 < 2x - 3 < 2y - 3 \end{aligned}$$

だから、

$$\begin{aligned} (2x - 3, 2y - 3) &= (1, 15), (3, 5) \\ \Leftrightarrow (x, y) &= (2, 9), (3, 4) \end{aligned}$$

【別解】

$$\begin{aligned} \frac{5}{3} &= \left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 \\ \sqrt{\frac{5}{3}} < 1 + \frac{1}{x} &\Leftrightarrow x < \frac{\sqrt{15} + 3}{2} \\ \therefore x &= 2, 3 \end{aligned}$$

$x = 2$ のとき、

$$\frac{5}{3} = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) \Leftrightarrow y = 9$$

$x = 3$ のとき、

$$\frac{5}{3} = \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) \Leftrightarrow y = 4$$

(2)

$$\frac{12}{5} = \left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) \left(1 + \frac{1}{z}\right) < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3$$

$$\sqrt[3]{\frac{12}{5}} < 1 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x < \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{12} - \sqrt[3]{5}}$$

である. ここに、 $6^3 = 216, 7^3 = 343, 8^3 = 512, 9^3 = 729$ であるから、

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{12} - \sqrt[3]{5}} &= \frac{\sqrt[3]{5} (\sqrt[3]{144} + \sqrt[3]{60} + \sqrt[3]{25})}{12 - 5} \\ &= \frac{\sqrt[3]{720} + \sqrt[3]{300} + 5}{7} < \frac{9 + 7 + 5}{7} < 3 \end{aligned}$$

よって、 $x = 2$ である. このとき、

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) \left(1 + \frac{1}{z}\right) = \frac{12}{5}$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{y}\right) \left(1 + \frac{1}{z}\right) = \frac{8}{5}$$

$$\frac{8}{5} < \left(1 + \frac{1}{y}\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{8}{5}} < 1 + \frac{1}{y} \Leftrightarrow y < \frac{2\sqrt{10} + 5}{3}$$

これと $2 < y$ より、 $y = 3$ である.

$$\therefore \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{z}\right) = \frac{8}{5} \Leftrightarrow z = 5$$

【演習 90】

a, b は $a \geq b > 0$ を満たす整数とし、 x と y の 2 次方程式

$$x^2 + ax + b = 0, \quad y^2 + by + a = 0$$

がそれぞれ整数解をもつとする。

(1) $a = b$ とするとき、条件を満たす整数 a をすべて求めよ。

(2) $a > b$ とするとき、条件を満たす整数の組 (a, b) をすべて求めよ。

【2011 名古屋大学】

-
- (1) $x^2 + ax + a = 0$ が整数解をもつが 2 解の和 $= -a =$ 整数なので、2 解とも整数である。その 2 整数解を $\alpha, \beta (\alpha \leq \beta)$ とすると、

$$\alpha + \beta = -a, \alpha\beta = a$$

a を消去して、

$$\alpha + \beta = -\alpha\beta$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + 1)(\beta + 1) = 1$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + 1, \beta + 1) = (1, 1), (-1, -1)$$

$$\Leftrightarrow (\alpha, \beta) = (0, 0), (-2, -2)$$

よって、 $a > 0$ だから $a = 4$ である。

- (2) $x^2 + ax + b = 0$ の 2 解を $\alpha, \beta (\alpha \leq \beta)$ とおくと、

$$\alpha + \beta = -a, \alpha\beta = b$$

ここで、 a, b は $a > b > 0$ を満たす整数であるから、 α, β は負の整数である。つまり、

$$\alpha \leq \beta \leq -1$$

a, b を消去すると、

$$-\alpha - \beta > \alpha\beta \Leftrightarrow (\alpha + 1)(\beta + 1) < 1$$

$\alpha \leq \beta \leq -2$ とすると、 $\alpha + 1 \leq \beta + 1 \leq -1$ だから、

$$(\alpha + 1)(\beta + 1) \geq 1$$

となって、適さず。したがって、 $\beta = -1$ である。

よって、 $1 - a + b = 0$ が成り立つ。

$y^2 + by + a = 0$ の 2 解を γ, δ とすると、

$$\gamma + \delta = -b, \gamma\delta = a$$

これを $1 - a + b = 0$ に代入して、

$$1 - \gamma\delta - \gamma - \delta = 0$$

$$\Leftrightarrow (\gamma + 1)(\delta + 1) = 2$$

$$\Leftrightarrow \{\gamma + 1, \delta + 1\} = \{-1, -2\}$$

$$\Leftrightarrow \{\gamma, \delta\} = \{-2, -3\}$$

$$\therefore a = 6, b = 5$$

【演習 91】

自然数の 2 乗になる数を平方数という。以下の問いに答えよ。

- (1) 10 進法で表して 3 桁以上の平方数に対し、10 の位の数を a 、1 の位の数を b とおいたとき、 $a + b$ が偶数となるならば、 b は 0 または 4 であることを示せ。
- (2) 10 進法で表して 5 桁以上の平方数に対し、1000 の位の数、100 の位の数、10 の位の数、および 1 の位の数の 4 つすべてが同じ数となるならば、その平方数は 10000 で割り切れることを示せ。

【2004 東京大学】

- (1) 3 桁以上の自然数 $100M + 10p + q$ の平方数は

$$(100M + 10p + q)^2 = 100M'^2 + 20pq + q^2$$

である。 q^2 の 1 の位が b であり、 q^2 の 10 位の数と、 $2pq$ の 1 位の数字の和を 10 で割った余りが a である。 $2pq$ の 1 位の数字の和を 10 で割った余りは偶数であるから、 a が偶数ならば、 q^2 の 10 位の数も偶数であり、 a が奇数ならば、 q^2 の 10 位の数も奇数である。

$$0^2 = 00, 1^2 = 01, 2^2 = 04, 3^2 = 09, 4^2 = 16$$

$$5^2 = 25, 6^2 = 36, 7^2 = 49, 8^2 = 64, 9^2 = 81$$

より、 q が奇数のとき、 q^2 の 10 位の数は偶数になっているから、 $a + b$ は奇数になる。したがって、 $a + b$ が偶数になるのは、 q が偶数で、 q^2 の 10 位の数も偶数であるときである。それは、

$$q = 0, 4, 8$$

のときだから、 $b = 0, 4$ である。

- (2) $a + a =$ 偶数だから、(1) より、 $a = 0, 4$ である。 $a = 4$ とすると、その平方数は、

$$(100M + 4)^2, (100M + 8)^2$$

であるが、

$$(100M + 4)^2 = 10000M^2 + 800M + 16$$

$$(100M + 8)^2 = 10000M^2 + 1600M + 64$$

となって、不適であるから、 $a = 0$ であり、その平方数は、

$$(100M)^2 = 10000M^2$$

これは、10000 で割り切れる。

【演習 92】

n, a, b を 0 以上の整数とする。 a, b を未知数とする方程式

$$(*) \quad a^2 + b^2 = 2^n$$

を考える。

(1) $n \geq 2$ とする。 a, b が方程式 $(*)$ を満たすならば、 a, b はともに偶数であることを証明せよ。(ただし、0 は偶数に含める。)

(2) 0 以上の整数 n に対して、方程式 $(*)$ を満たす 0 以上の整数の組 (a, b) をすべて求めよ。

【2004 京都大学】

(1) a, b の一方が偶数、他方が奇数のときは、 $a^2 + b^2$ は奇数になり、 $n \geq 2$ のもとでは、 $a^2 + b^2 = 2^n$ が 4 の倍数になることに矛盾する。 a, b がともに奇数とすると、

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (2m+1)^2 + (2n+1)^2 \\ &= 4(m^2 + m + n^2 + n) + 2 \end{aligned}$$

と表せて、4 の倍数にはならないから、 a, b はともに偶数である。

(2) (i) $n = 0$ のとき、 $a^2 + b^2 = 1$ を満たす (a, b) は

$$(a, b) = (1, 0), (0, 1)$$

(ii) $n = 1$ のとき、 $a^2 + b^2 = 2$ を満たす (a, b) は

$$(a, b) = (1, 1)$$

(iii) $n \geq 2$ のとき、(1) より、 $a = 2m, b = 2n$ とおけて、

$$m^2 + n^2 = 2^{n-2}$$

を得る。このことに着目すると、

$n = 2p (p \geq 1)$ のとき、 $a = 2^p a', b = 2^p b'$ とおけて、

$$a^2 + b^2 = (2^p a')^2 + (2^p b')^2 = 2^{2p}$$

$$\Leftrightarrow (a')^2 + (b')^2 = 1$$

$$\therefore (a', b') = (0, 1), (1, 0)$$

$$\therefore (a, b) = (0, 2^{\frac{n}{2}}), (2^{\frac{n}{2}}, 0)$$

$n = 2p + 1 (p \geq 0)$ のとき、 $a = 2^p a', b = 2^p b'$ とおけて、

$$a^2 + b^2 = (2^p a')^2 + (2^p b')^2 = 2^{2p+1}$$

$$\Leftrightarrow (a')^2 + (b')^2 = 2$$

$$\therefore (a', b') = (1, 1)$$

$$\therefore (a, b) = \left(2^{\frac{n-1}{2}}, 2^{\frac{n-1}{2}} \right)$$

【演習 93】

- (1) 正の整数 n で $n^3 + 1$ が 3 で割り切れるものをすべて求めよ。
(2) 正の整数 n で $n^n + 1$ が 3 で割り切れるものをすべて求めよ。

【2003 一橋大学】

- (1) $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$ は連続 3 整数の積ゆえ 3 の倍数である。
したがって、 $n^3 + 1 = n^3 - n + n + 1$ が 3 の倍数になるのは、 $n+1$ が 3 の倍数のときである。
- (2) $f(n) = n^n + 1$ とおく。
- (i) $n = 3m$ のとき、
$$f(3m) = (3m)^n + 1$$

は 3 の倍数ではない。
- (ii) $n = 3m + 1$ のとき、
$$f(3m+1) = (3m+1)^n + 1 = 3M + 1 + 1 = 3M + 2$$

は 3 の倍数ではない。
- (iii) $n = 3m - 1$ のとき、
$$f(3m-1) = (3m-1)^n + 1 = 3M + (-1)^n + 1$$

が 3 の倍数であるのは、 n が奇数のとき、 $3m - 1 = 2l - 1$ とおけるから、 m は偶数。
 $\therefore n = 3(2k) - 1 = 6k - 1$

【演習 94】

自然数 n の関数 $f(n), g(n)$ を

$f(n) = n$ を 7 で割ったあまり、

$$g(n) = 3f\left(\sum_{k=1}^7 k^n\right)$$

によって定める。

- (1) すべての自然数 n に対して、 $f(n^7) = f(n)$ を示せ。
(2) あなたの好きな自然数 n を 1 つ決めて $g(n)$ を求めよ。その $g(n)$ の値をこの設問 (2) におけるあなたの得点とする。

【1995 京都大学】

(1)

$$\begin{aligned} & (n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3) \\ &= n(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9) \\ &= n(n^6-14n^4+49n^2-36) \\ &= n^7-14n^5+49n^3-36n \\ &= n^7-n+7(-2n^5+7n^3-5n) \end{aligned}$$

$(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)$ は連続7整数の積だから7の倍数である。よって、 n^7-n も7の倍数である。すなわち、 $f(n^7)=f(n)$ が成り立つ。

(2) n を6で割った余りを r , 商を q とおくと、 $n=6q+r$

$$\begin{aligned} k^n - k^r &= k^{6q+r} - k^r \\ &= k^r (k^{6q} - 1) \\ &= k^r (k^6 - 1) \left\{ (k^6)^{q-1} + (k^6)^{q-2} + \cdots + (k^6) + 1 \right\} \\ &= k^{r-1} (k^7 - k) \left\{ (k^6)^{q-1} + (k^6)^{q-2} + \cdots + (k^6) + 1 \right\} \end{aligned}$$

であるから、 $r=1, 2, 3, 4, 5$ のときは、

$$f(k^n) = f(k^r)$$

したがって、

$$\begin{aligned} g(n) &= 3f(1+2^n+3^n+4^n+5^n+6^n+7^n) \\ &= 3f(1+2^n+3^n+4^n+5^n+6^n) \\ &= 3f(1+2^r+3^r+4^r+5^r+6^r) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 6^r + 1 = (7-1)^r + 1 = 7M + (-1)^r + 1 \\ 5^r + 2^r = (7-2)^r + 2^r = 7M + (-2)^r + 2^r \\ 4^r + 3^r = (7-3)^r + 3^r = 7M + (-3)^r + 3^r \end{cases}$$

だから、 r が奇数のときは、これらはみな7の倍数になる。だから、

$$g(n) = 3f(1+2^r+3^r+4^r+5^r+6^r) = 0$$

・ $r=2$ のとき、

$$\begin{aligned} & 1+2^r+3^r+4^r+5^r+6^r \\ &= 7M+2(1+4+9)=7N \end{aligned}$$

だから、

$$g(n) = 3f(1+2^r+3^r+4^r+5^r+6^r) = 0$$

$r=4$ のとき、

$$\begin{aligned} & 1+2^r+3^r+4^r+5^r+6^r \\ &= 7M+2(1+4^2+9^2)=7N \end{aligned}$$

だから、

$$g(n) = 3f(1 + 2^r + 3^r + 4^r + 5^r + 6^r) = 0$$

よって、 $r = 1, 2, 3, 4, 5$ のとき、 $g(n) = 0$

$n = 6q$ のとき、

$$1^{6q} \equiv 1 \pmod{7}$$

$$2^{6q} = 8^{2q} \equiv 1^{2q} \equiv 1 \pmod{7}$$

$$3^{6q} = 27^{2q} \equiv (-1)^{2q} \equiv 1 \pmod{7}$$

$$4^{6q} = 8^{3q} \equiv 1^{3q} \equiv 1 \pmod{7}$$

$$5^{6q} = 125^{2q} \equiv (-1)^{2q} \equiv 1 \pmod{7}$$

$$6^{6q} = 36^{3q} \equiv 1^{3q} \equiv 1 \pmod{7}$$

$$7^{6q} \equiv 0 \pmod{7}$$

だから、

$$g(n) = 3 \times 6 = 18$$

【演習 95】

各辺の長さが整数となる直角三角形がある。

- (1) この直角三角形の内接円の半径は整数であることを示せ。
- (2) この直角三角形の三辺の長さの和は三辺の長さの積を割り切ることを証明せよ。

【2002 お茶の水女子大学】

- (1) 直角三角形の 3 辺の長さを a, b, c とし、 $a^2 + b^2 = c^2$ とする。内接円の半径を r とすると、

$$a - r + b - r = c$$

$$\therefore r = \frac{a + b - c}{2}$$

a, b, c がすべて偶数のときは r は整数である。

そうではないとき、 a, b, c がともに奇数とすると、

$$\begin{cases} (2k)^2 = 4k^2 \\ (2k+1)^2 = 4(k^2 + k) + 1 \end{cases}$$

だから、 $a^2 + b^2$ は 4 で割ると 2 余る数になるが、完全平方数 c^2 がこのようになることはないから、 a, b, c の 1 つが奇数であり、したがって、 c も奇数になるから、 r は整数である。

(2)

$$\frac{1}{2}ab = \frac{a+b+c}{2}r$$

が成り立つから、

$$r = \frac{ab}{a+b+c}$$

$$rc = \frac{abc}{a+b+c}$$

よって、直角三角形の三辺の長さの和は三辺の長さの積を割り切る

【演習 96】

n は自然数とし、 2^n は 100 桁の数で、 2^{n-1} は 99 桁の数である。

(1) n を求めよ。

(2) 2^n の一の位の数字を求めよ。

(3) 2^n の十の位の数字を求めよ。

ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ としてよい。

【2005 千葉大学】

(1)

$$\begin{aligned} 10^{99} &\leq 2^n < 10^{100}, 10^{98} \leq 2^{n-1} < 10^{99} \\ \Leftrightarrow 99 &\leq n \log_{10} 2 < 100, 98 \leq (n-1) \log_{10} 2 < 99 \\ \Leftrightarrow \frac{99}{\log_{10} 2} &\leq n < \frac{100}{\log_{10} 2}, \frac{98}{\log_{10} 2} + 1 \leq n < \frac{99}{\log_{10} 2} + 1 \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} \frac{99}{\log_{10} 2} &= 328.903 \dots\dots \\ \frac{99}{\log_{10} 2} + 1 &= 329.903 \dots\dots \\ \frac{98}{\log_{10} 2} + 1 &= 326.581 \dots\dots \\ \frac{100}{\log_{10} 2} + 1 &= 333.225 \dots\dots \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} 328.903 \dots\dots &\leq n < 329.903 \dots\dots \\ \Leftrightarrow n &= 329 \end{aligned}$$

(2) $2^5 \equiv 2 \pmod{10}$ だから、 $2^{n+4} \equiv 2^n \pmod{10}$. これを用いて、

$$2^{329} = 2^{82 \cdot 4 + 1} \equiv 2 \pmod{10}$$

2^{239} の 1 の位の数字は 2 である.

(3) 求めるものは、 $\frac{2^{329} - 2}{10}$ の 1 の位の数字である.

$$\begin{aligned} \frac{2^{329} - 2}{10} &= \frac{2(2^{82 \cdot 4} - 1)}{10} \\ &= \frac{2(16^{82} - 1)}{10} \\ &= \frac{2 \cdot 15(16^{81} + 16^{80} + 16^{79} + \cdots + 16 + 1)}{10} \\ &= 3(16^{81} + 16^{80} + 16^{79} + \cdots + 16 + 1) \\ &\equiv 3(6^{81} + 6^{80} + 6^{79} + \cdots + 6 + 1) \pmod{10} \\ &\equiv 3(6 + 6 + 6 + \cdots + 6 + 1) \pmod{10} \\ &= 3(6 \times 81 + 1) \\ &\equiv 3(6 \times 1 + 1) \pmod{10} \\ &\equiv 1 \pmod{10} \end{aligned}$$

であるから、1 である.



$$\begin{aligned} 2^{329} &= 10936253623915059621862511135588 \\ &\quad 1068267658471544660621821288530320497 \\ &\quad 6499599687961611756588511526912 \end{aligned}$$

【演習 97】

自然数 n に対して、 $f(n) = 5^{3n} + 5^{2n} + 5^n + 1$ とおく.

(1) n が 4 の倍数でないとき、 $f(n)$ は 13 で割り切れることを示せ.

(2) n が 4 の倍数のとき、 $f(n)$ は 13 で割った余りを求めよ.

【京都府立医科大学】

(1) n が 4 の倍数でないとき、

$$5^2 = 25 \equiv -1 \pmod{13}$$

$$5^3 \equiv -5 \pmod{13}$$

であるから、

$$\begin{aligned}f(n) &\equiv (-5)^n + (-1)^n + 5^n + 1 \pmod{13} \\f(4m+1) &\equiv (-5)^{4m+1} + (-1)^{4m+1} + 5^{4m+1} + 1 \pmod{13} \\&\equiv 0 \pmod{13} \\f(4m+3) &\equiv (-5)^{4m+3} + (-1)^{4m+3} + 5^{4m+3} + 1 \pmod{13} \\&\equiv 0 \pmod{13} \\f(4m+2) &\equiv 25^{2m+1} + 1 + 25^{2m+1} + 1 \pmod{13} \\&\equiv (-1)^{2m+1} + 1 + (-1)^{2m+1} + 1 \pmod{13} \\&\equiv 0 \pmod{13}\end{aligned}$$

よって、 n が 4 の倍数でないとき、 $f(n)$ は 13 で割り切れる。

(2)

$$\begin{aligned}f(4m) &\equiv (-5)^{4m} + (-1)^{4m} + 5^{4m} + 1 \pmod{13} \\&\equiv 25^{2m} + 1 + 25^{2m} + 1 \pmod{13} \\&\equiv (-1)^{2m} + 1 + (-1)^{2m} + 1 \pmod{13} \\&\equiv 4 \pmod{13}\end{aligned}$$

だから、 n が 4 の倍数のとき、 $f(n)$ は 13 で割った余りは 4 である。

【演習 98】

p, q は互いに素な整数とし、 $1 < p < q$ とする。座標平面内の集合 L を

$$L = \{(m, n) \mid m, n \text{ は整数で } 0 \leq m < q-1, 0 \leq n < p-1\}$$

とし、 L の各元 $A(m, n)$ に対し $N(A) = mp + nq$ とおく。

- (1) L の元 A, B について、 $N(A) = N(B)$ ならば $A = B$ であることを示せ。
- (2) L の元 $A(m, n)$ に対し、 L の元 $A^\sharp (q-2-m, p-2-n)$ を対応させる。 $A^\sharp \neq A$ を示せ。
- (3) $N(A) \leq pq - (p+q)$ となるためには、 $N(A^\sharp) \geq pq - (p+q)$ であることが必要十分条件であることを示せ。
- (4) $N(A) \leq pq - (p+q)$ を満たす L の元 A の個数を求めよ。

【2002 金沢大学】

- (1) $A(m, n), B(r, s)$ とおき、 $N(A) = N(B)$ ならば、

$$\begin{aligned}mp + nq &= rp + sq \\ \Leftrightarrow (m-r)p &= (s-n)q\end{aligned}$$

p, q は互いに素だから、 $m - r$ が q の倍数、

$$-(q-1) \leq m-r \leq q-1$$

であるから、 $m-r=0$ である。よって、 $n-s=0$ であるから、 $A=B$ である。

(2) $A^\# = A$ とすると、

$$m = q-2-m, n = p-2-n$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{q}{2} - 1, n = \frac{p}{2} - 1$$

このような自然数 m, n が存在するためには、 p, q が同時に偶数であることが必要であるが、 p, q は互いに素であるから、これは不可。よって、 $A^\# \neq A$

(3)

$$N(A) \leq pq - (p+q) \Leftrightarrow mp + nq \leq pq - (p+q)$$

のとき、

$$M = q-2-m, N = p-2-n$$

$$\Leftrightarrow m = q-2-M, n = p-2-N$$

とおくと、

$$(q-2-M)p + (p-2-N)q \leq pq - (p+q)$$

$$\Leftrightarrow Mp + Nq \geq pq - (p+q)$$

$$\Leftrightarrow N(A^\#) \geq pq - (p+q)$$

(4) L の各元 A と $A^\#$ は異なり、どの元についても、

$$N(A) \leq pq - (p+q), N(A) \geq pq - (p+q)$$

の一方だけが成り立つ。 L の元の個数全体は $(p-1)(q-1)$ 個だから、 $N(A) \leq pq - (p+q)$ を満たす A の個数は、

$$\frac{(p-1)(q-1)}{2}$$

である。

【演習 99】

次の問いに答えよ。

(1) 5 以上の素数は、ある自然数 n を用いて $6n+1$ または $6n-1$ の形で表されることを示せ。

(2) N を自然数とする。 $6N-1$ は、 $6n-1$ (n は自然数) の形で表される素数を約数にもつことを示せ。

(3) $6n-1$ (n は自然数) の形で表される素数は無限に多く存在することを示せ。

【2009 千葉大学】

-
- (1) 5以上の素数は2,3では割り切れない数であるから、

$$6n+1, 6n-1$$

で表される。

- (2) $6N-1$ は5以上で2でも3でも割れない数であるから、その素因数は $6n+1$, または $6n-1$ である。いまその素因数がすべて $6n_i+1$ であると仮定する。

$$6N-1 = (6n_1+1)^a \cdots (6n_k+1)^b$$

と表わせるが、両辺は6で割った余りは等しくないので、矛盾する。よって、少なくとも一つの $6n-1$ の素因数をもつ。

- (3) $6n-1$ の形で表わせる素因数が有限個であると、それらを

$$6n_1-1, 6n_2-1, \dots, 6n_M-1 \dots \textcircled{1}$$

とおく。これらの積を P おくと、

$$P = 6Q+1, 6Q-1$$

のいずれかになる。 $P = 6Q+1$ のとき、

$$P-2 = 6Q-1$$

の右辺は①のどれかの素因数をもち、 P も同じ素因数をもつから、2もその素因数をもつことになり、矛盾。

$P = 6Q-1$ のとき、

$$P-6 = 6(Q+1)-1$$

の右辺は①のどれかの素因数をもち、 P も同じ素因数をもつから、 $6=2 \times 3$ もその素因数をもつことになり、矛盾。

よって、 $6n-1$ (n は自然数) の形で表される素数は無限に多く存在する。